Variable Compleja

Dr. Carlos Lizama

Universidad de Santiago de Chile

Facultad de Ciencia

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Introducción

El presente texto de Variable Compleja corresponde al curso del mismo nombre (hoy Cálculo IV) impartido por el autor a la carrera de Ingeniería Matemática durante varios semestres consecutivos.

El libro esta dividido en dos partes. La primera parte, contiene los tópicos de teoría clásicos que debieran ser cubiertos en un semestre lectivo. En el primer capítulo, se incluyen propiedades básicas de los números complejos y sus propiedades algebraicas, que se revisan muy rápidamente. Luego, nos concentramos en la representación geométrica, tanto en su forma polar como cartesiana. Posteriormente, damos énfasis en la representación en variable compleja de elementos estándar de la geometría, como son el circulo y la recta. También, nos encontramos con la representación de los números complejos en la esfera de Riemann, lo que se conoce como proyección estereográfica, que admite interesantes aplicaciones en otras ramas de las ciencias. Luego, introducimos de manera estándar los elementos del análisis por medio de la noción de distancia en el plano complejo. Finalizamos el capítulo con un vistazo a varias funciones básicas como la exponencial, seno y coseno. El capítulo 2 se concentra en lo que será la parte medular de este curso: Las funciones analíticas u holomorfas. Se revisa la definición, que se presenta como la extensión natural del concepto de derivada en la recta real. Luego, varias nociones equivalentes son presentadas a lo largo del texto, lo que constituye la columna vertebral de estos apuntes. El concepto de función analítica es examinado con variados ejemplos concretos al finalizar este capítulo. El capítulo 3, se dedica a construir la primera equivalencia práctica de función analítica por medio de series de Taylor. De paso, nos encontramos con otros conceptos importantes, como la extensión y prolongación analítica. Finalizamos enfatizando una diferencia geométrica importante, las transformaciones conformes. El capítulo 4 cambia el rumbo de la teoría para dar con otra caracterización de las funciones analíticas por medio del concepto de integración de funciones de variable compleja. Para ello, se revisa la noción de integral de línea y se procede a definir y establecer los pilares de la teoría de integración desde el teorema clásico de Stokes. Con ello, aparece de manera natural la fórmula de Cauchy que está en la base de todos los teoremas fundamentales de variable compleja. El capítulo 5, nos provee de un conjunto de herramientas que son necesarias conocer y aparecen en una variedad de lugares tanto en matemática pura como aplicada. La principal es el cálculo de integrales mediante el teorema de residuos.

Mis agradecimientos a Daniela Vilches, quien trabajó estos apuntes durante el primer y segundo semestres del 2012 y a Joselyn Pinilla, quien pudo dar forma un poco mas completa el segundo semestre de 2013. La version actual se completó de escribir durante el periodo de pandemia en septiembre de 2020.

Santiago, Marzo 2022.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

La primera noción de un número complejo fue descubierta en conexión con resolver ecuaciones cuadráticas.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación $z^2 + 1$. Obviamente, esta no tiene soluciones reales, ya que para cualquier real x , $x^2 \geq 0$ y $x^2+1 > 0$.

La idea es escribir, formalmente, $z = \pm\sqrt{-1}$; pero no existe número real cuyo cuadrado de -1. Luego, si la ecuación tiene una solución, debe ser en un sistema de números mayor que el conjunto de los números reales.

Este fue el problema planteado a matemáticos por alrededor de 700 años: Extender los reales a un sistema mayor de números en el cual la ecuación $z^2 + 1$ puede tener una solución.

C. Gauss $(1780-1840)$ fue el primer matemático en usar sistemáticamente números complejos. La serie Hipergeométrica

$$1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)\cdot 1\cdot 2}x^2+...$$

Se comprende mejor al analizar los complejos $\mid x \mid< 1$. (Note que si $b = c$ y $a = 1$ se obtiene la serie geométrica).

Gauss Demostró:

"Toda ecuación $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0 = 0$ tiene n-soluciones en $\mathbb{C}$".

A. L. Cauchy dio la estructura central al desarrollo de variable compleja a través de la idea de la integral de línea:

$$\int_\gamma f(z)dz,$$

la cual da sentido a la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

1.2. Propiedades algebraicas

El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ es un cuerpo con la suma y el producto definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbb{C} = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \ / \ \ & (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)\,, \\ & (a,b)\,(c,d) = (ac - bd, bc - ad)\}\end{aligned}$$

Las unidades aditivas y multiplicativas son $(0,0)$ y $(1,0)$, respectivamente. Veamos:

$$(a,b) + (0,0) = (a,b)$$

y

$$(a,b)(1,0) = (a,b).$$

Además, cada elemento no nulo, tiene inverso. Para (a,b), su inverso es $(-a,-b)$.

Definimos $i = (0,1)$, entonces podemos escribir el par (a,b) de la siguiente forma:

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + ib.$$

Esta es la notación que se ocupará desde ahora.

Bajo la suma y producto, $\mathbb{C}$ es un cuerpo conmutativo.

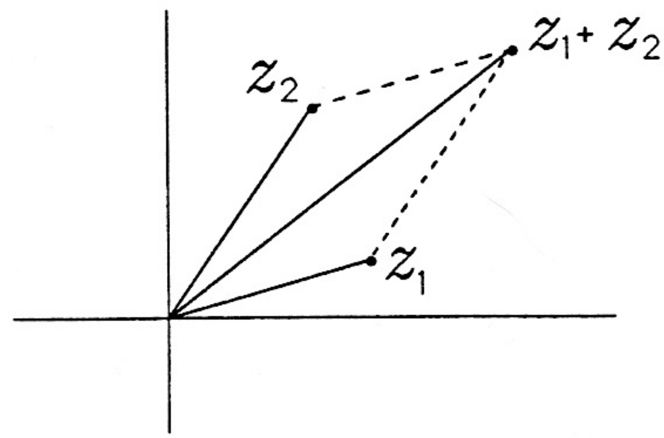
Observacion 1. *Consideremos $i = (0,1)$, entonces:*

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0) = -1.$$

Luego, $i^2 = -1$.

Otra forma de definir el conjunto de los números complejos:

$$\mathbb{C} := \left\{ z := a + ib \ / \ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \right\}$$



Como $i^2 = -1$, la ecuación $z^2 + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$. En efecto:

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i).$$

Más generalmente:

$$z^2 + w^2 = (z + iw)(z - iw).$$

Si $z = a \in \mathbb{R}$ y $w = b \in \mathbb{R}$, entonces (para $a \neq 0$, $b \neq 0$)

$$a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$$

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2},$$

con lo cual se tiene una fórmula para el recíproco de un número complejo.

Notacion 2.

$\overline{z} = a - ib$ es el *conjugado* de $z = a + ib$.

$\mid z \mid \; = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ es el *valor absoluto* de z.

Con las notaciones anteriores, tenemos:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\mid z \mid^2}, \qquad \text{si } z \neq 0$$

Definición 3. *Si $z = a + ib$, diremos que a es la parte real de z y escribimos: $a = Re(z)$. Análogamente, diremos que b es la parte imaginaria de z y escribimos: $b = Im(z)$.*

En consecuencia, $z = Re(z) + iIm(z)$. Del mismo modo, podemos escribir el conjugado de z en función de su parte real e imaginaria, es decir, $\overline{z} = Re(z) - iIm(z)$.

Además, podemos escribir la parte real e imaginaria en función de z y $\overline{z}$. Sumando, se obtiene: $Re(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$.

Por otro lado, restando, se tiene: $Im(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Note además que $Re(z) \leq \mid z \mid$ y $Im(z) \leq \mid z \mid$.

Propiedades Básicas

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

2. $\overline{\overline{z}} = z$

3. $\overline{wz} = \overline{w}\;\overline{z}$

4. $\mid zw \mid = \mid z \mid\mid w \mid$

5. $|\overline{z}| = |z|$

Proposición 4. *(Desigualdad Triangular)*

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

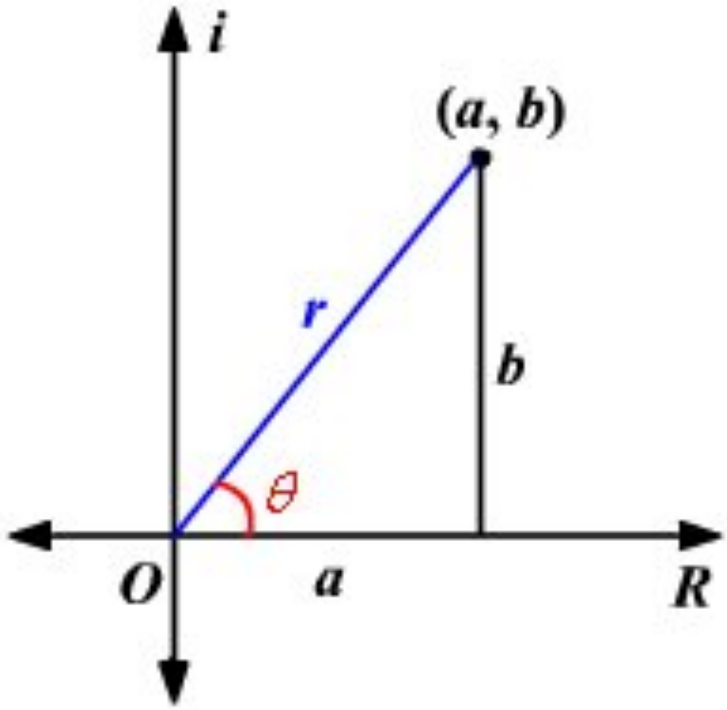
Demostración.

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) \\
&= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\
&= |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\
&= (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

■

1.3. Representación geométrica

Para la forma polar tenemos que $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ y $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$, de donde, $a = r\cos\theta$ y $b = r\sin\theta$.



Se observa que $r = |z|$. AdemÃČÂąs, definimos $\theta = Arg(z)$.

Un problema en general es que $Arg(z)$ es una función multivariable. De esta forma, tendremos que **elegir** un rango de valores admisibles para el ángulo θ. Una elección posible, que justificaremos más adelante, es $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Propiedad: $Arg(zw) = Arg(z) + Arg(w)$.

Demostración.

Sea $z \in \mathbb{C}$ y observe que

$$z = a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right).$$

Entonces, podemos escribir

$$z = \mid z \mid (\cos\theta + i\sin\theta)$$

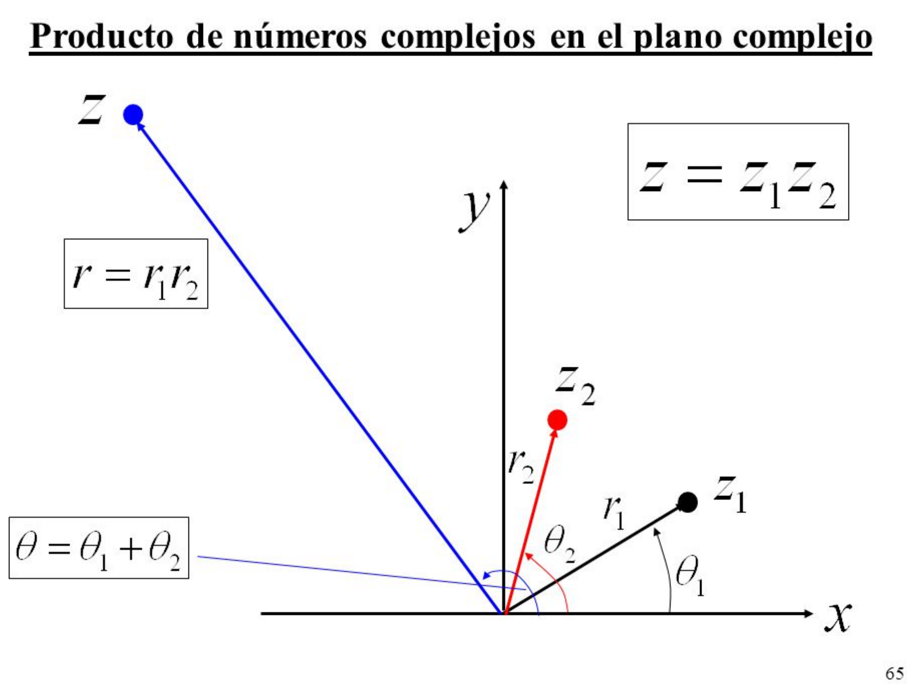
y

$$w = \mid w \mid (\cos\phi + i\sin\phi).$$

Luego:

$$\begin{aligned}
zw &= |z|\,|w|\,(\cos\theta + i\sin\theta)\,(\cos\phi + i\sin\phi) \\
&= |z|\,|w|\,(\cos\theta\cos\phi + i\sin\phi\cos\theta + i\sin\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) \\
&= |z|\,|w|\,[(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i\,(\sin\phi\cos\theta + \sin\theta\cos\phi)] \\
&= |z|\,|w|\,[\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)]
\end{aligned}$$

Entonces: $Arg(zw) = \theta + \phi = Arg(z) + Arg(w)$. ■



Definición 5. *Definimos la función exponencial como*

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

También se puede escribir como $cis(\theta)$ *o* $exp(\theta)$.

Consideremos $f(\theta) := \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Sea $\theta = 0$, entonces, $f(0) = \cos(0) + i\sin(0) = 1$.

Además

$$\begin{aligned} f(\theta)f(\phi) &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) \\ &= \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi) \\ &= f(\theta+\phi). \end{aligned}$$

Cualquier función que cumpla estas dos propiedades se dice que satisface la Ecuación Funcional de Cauchy. Se puede demostrar, que las únicas soluciones, tienen la forma:

$$f(z) = e^{az}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Esto justifica la notación $e^{i\theta}$. Pero además, observaremos que esta notación es consistente con lo que se espera de una función exponencial.

Propiedades de la función exponencial

1. $e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi} \quad \theta, \phi \in \mathbb{R}$;

2. $(e^{i\theta})^{\alpha} = e^{i\theta\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$;

3. $(e^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = e^{i\theta\frac{1}{n}}, \quad \theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$;

4. $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \quad \theta \in \mathbb{R}$;

5. $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1 \quad \theta \in \mathbb{R}$.

La demostración de estas propiedades queda de ejercicio.

Si analizamos el comportamiento de la función exponencial podemos observar que:

$$e^{2ki\pi} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1 \qquad \forall z \in \mathbb{Z}.$$

Como un ejemplo de aplicación de esta importante propiedad, estudiemos las soluciones de la ecuación

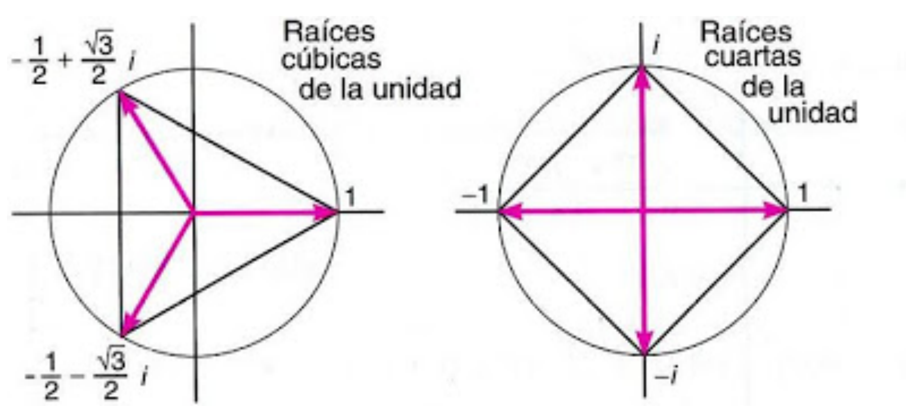
$$z^n = 1,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ esta fijo. En otras palabras queremos encontrar las raíces n-ésimas de la unidad. Se observa que podemos reescribir como:

$$z^n = e^{2ki\pi}.$$

Por lo tanto

$$z = e^{\frac{2ki\pi}{n}}.$$



Más generalmente tenemos:

$$\begin{aligned} z^n &= w \\ &= \mid w \mid e^{iArg(w)} \\ &= \mid w \mid e^{iArg(w)} e^{2ki\pi} \\ &= \mid w \mid e^{i(Arg(w)+2k\pi)}. \end{aligned}$$

Luego:

$$z = |w|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(Arg(w)+2k\pi)}{n}}.$$

conocida como la fórmula de De Moivre.

1.4. Ecuación del círculo y de la recta

Consideremos geométricamente la situación de todos los puntos $z \in \mathbb{C}$ que están a una distancia r de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Esto se escribe analíticamente como:

$$\begin{aligned}
\mid z - z_0 \mid = r &\Leftrightarrow \mid z - z_0 \mid^2 = r^2 \\
&\Leftrightarrow (z - z_0)\overline{(z - z_0)} = r^2 \\
&\Leftrightarrow (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = r^2 \\
&\Leftrightarrow z\overline{z} - z\overline{z_0} - z_0\overline{z} + z_0\overline{z_0} = r^2 \\
&\Leftrightarrow z\overline{z} - z\overline{z_0} - z_0\overline{z} + (\mid z_0 \mid^2 - r^2) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de un círculo en el plano complejo es:

$$z\overline{z} - z\overline{z_0} - z_0\overline{z} + \alpha = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Veamos ahora la ecuación de una recta. Sabemos que la ecuación de una recta, en su forma punto-pendiente, es: $y = mx + n$.

Si consideramos $x = Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ e $y = Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$, y reemplazamos estos valores en la ecuación punto-pendiente, nos queda:

$$\begin{aligned}
&\frac{z - \overline{z}}{2i} = m\frac{z + \overline{z}}{2} + n \\
\Leftrightarrow\ & z - \overline{z} = im(z + \overline{z}) + 2in \\
\Leftrightarrow\ & z - \overline{z} = imz + im\overline{z} + 2in \\
\Leftrightarrow\ & z - imz - \overline{z}im - \overline{z} - 2in = 0 \\
\Leftrightarrow\ & z(1 - im) - \overline{z}(1 + im) - 2in = 0 \\
\Leftrightarrow\ & z(m + i) + \overline{z}(m - i) + 2n = 0
\end{aligned}$$

Si hacemos $z_0 = m - i$, $\overline{z_0} = m + i$ y $\beta = 2n$, lo que se obtiene es la ecuación de la recta en variable compleja:

$$z\overline{z_0} + \overline{z}z_0 + \beta = 0, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

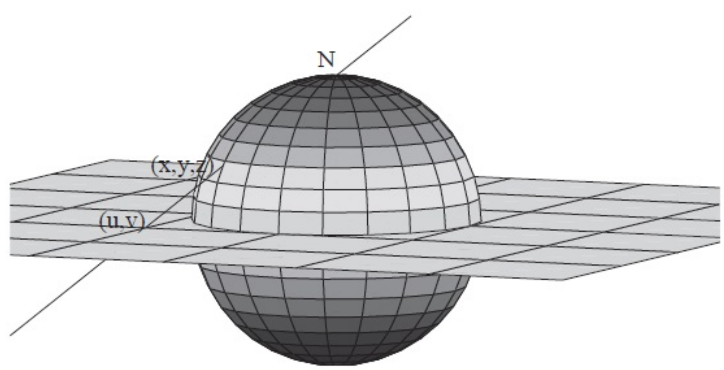
1.5. Proyección estereográfica

Si consideramos $f(z) = \dfrac{1}{z}$ y con $z = 0$, se obtiene formalmente $f(0) = \infty$. Por lo tanto, surge la necesidad de definir el siguiente conjunto:

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

que llamaremos plano complejo extendido y se representa geométricamente por una esfera

$$\mathcal{S}^2 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\Big\}$$



Ecuaciones de la proyección.

En primer lugar, nos planteamos la siguiente pregunta:

1. Dado un punto $B = (x, y, z)$ en la esfera

   $$\mathcal{S}^2 = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\Big\}$$

   determinar su proyección $\pi(B)$ en el plano $\mathbb{C}$, esto es, determinar un punto $(u, v) = Q = \pi(B)$ que corresponde a trazar una linea L que pasa por el punto B en la esfera y por su polo norte $N = (0, 0, 1)$.

Sea $L(t) := t(0,0,1) + (1-t)(x,y,z)$, $t \in \mathbb{R}$, tal linea (forma paramétrica de una recta en $\mathbb{R}^3$) y tratemos de encontrar t_0 tal que la recta anterior, L, intersecta al plano complejo. La recta la podemos reescribir como:

$$L(t) = ((1-t)x, (1-t)y, t + (1-t)z).$$

Buscamos t_0 tal que:

$$\begin{aligned} t_0 + (1-t_0)z = 0 \ &\Leftrightarrow \ t_0 + z - zt_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ t_0 = \frac{-z}{1-z} = \frac{z}{z-1}, \qquad z \neq 1 \\ &\Leftrightarrow \ 1 - t_0 = 1 - \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z} \end{aligned}$$

Por lo tanto $Q = \pi(B)$ es :

$$Q = \left(\frac{1}{1-z}x, \frac{1}{1-z}y, 0 \right).$$

Respondida la primera pregunta, nos planteamos ahora la pregunta inversa:

2. Dado un punto $A = (u, v, 0)$ en el plano $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, determinar el punto $P(A) = (x, y, z)$ en la esfera $\mathcal{S}^2$ que intersecta una recta L que pasa por el punto A y el polo norte de la esfera: $N = (0,0,1)$.

   Sea L tal recta, entonces se escribe:

$$L(t) = t(0,0,1) + (1-t)(u,v,0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

   ó

$$L(t) = ((1-t)\,u, (1-t)\,v, t)$$

   Encontremos t_0 tal que la recta L intersecta a la esfera. Es decir:

$$[(1-t)u]^2+[(1-t)v]^2+t^2=1$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ (1-t)^2u^2+(1-t)^2v^2=1-t^2=(1-t)(1+t)\\
&\Leftrightarrow\ u^2+v^2=\frac{1+t}{1-t}\\
&\Leftrightarrow\ (1-t)\left(u^2+v^2\right)=1+t\\
&\Leftrightarrow\ \left(u^2+v^2\right)-t\left(u^2+v^2\right)=1+t\\
&\Leftrightarrow\ u^2+v^2-1=t\left(1+u^2+v^2\right)\\
&\Leftrightarrow\ t_0=\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}
\end{aligned}$$

Luego:

$$1-t_0=1-\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}=\frac{2}{x^2+y^2+1}$$

Por lo tanto $P(A)$ es:

$$\begin{aligned}
P\left(A\right) &= \left(\left(1-t_0\right)x,\left(1-t_0\right)y,t_0\right)\\
&= \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)
\end{aligned}$$

Si hacemos $z=x+iy$ y $\overline{z}=x-iy$, se tiene:

$$P\left(A\right)=\left(\frac{z+\bar{z}}{\left|z\right|^2+1},\frac{i\left(\bar{z}-z\right)}{\left|z\right|^2+1},\frac{\left|z\right|^2-1}{\left|z\right|^2+1}\right).$$

1.6. Topología en $\mathbb{C}$ y Funciones Básicas

La forma más común de calcular la distancia entre dos puntos de $\mathbb{C}$ es la euclideana, esto es:

$$d(z,w) = \mid z-w \mid .$$

Otras formas son las siguientes:

$$d_1(z,w) = \frac{\mid z-w \mid}{1+\mid z-w \mid}$$

donde se observa que:

$$d_1(z,w) \leq 1.$$

Otra alternativa interesante es:

$$d_2(z,w) = \frac{2 \mid z-w \mid}{[(1+\mid z \mid^2)(1+\mid w \mid^2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Conceptos

1. **Convergencia de una sucesión:** Dada $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$, entonces $z_n \to L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\mid z_n - L \mid < \varepsilon$.

2. $\mathbb{C}$ **es completo** (Toda sucesión de Cauchy converge).

   En efecto: Sea $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión de Cauchy. Entonces

   $$\mid z_n - z_m \mid \to 0$$

   cuando $n, m \to \infty$.

Observe que si $z_n = x_n + iy_n$ entonces la propiedad $|Re(w)| \leq |w|$ implica

$| x_n - x_m |\leq| z_n - z_m |\to 0.$

Análogamente, la propiedad $|Im(w)| \leq |w|$ implica

$| y_n - y_m |\leq| z_n - z_m |\to 0.$

De aquí se tiene que: $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ y $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$ son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$ que sabemos, es completo. Luego, existen $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$x_n \to x_0$$

y

$$y_n \to y_0$$

Por lo tanto:

$$z_n \to x_0 + iy_0.$$

3. **Función Continua:** $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f es continua en z_0 si:

$$\forall (z_n) \subset \mathbb{C}, \quad z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to f(z_0).$$

Ejemplo 6. *a)* $f(z) = Re(z), \quad g(z) = Im(z).$

b) $f(z) = \overline{z}.$

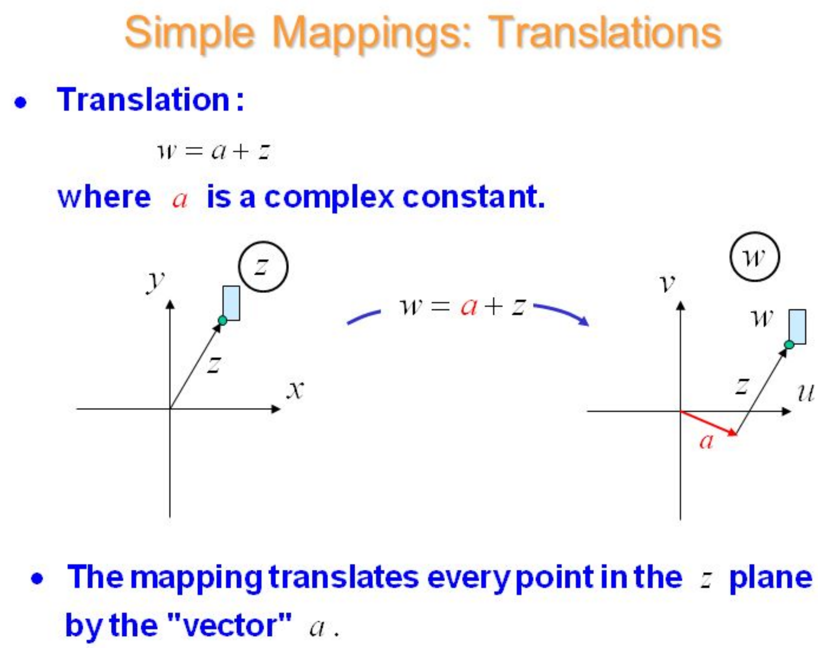
c) $p(z, \overline{z}) = \sum_{n,m} a_{n,m} z^n (\overline{z}^m).$

d) $\dfrac{p(z, \overline{z})}{q(z, \overline{z})}$ es continua en el abierto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / q(z, \overline{z}) \neq 0\}.$

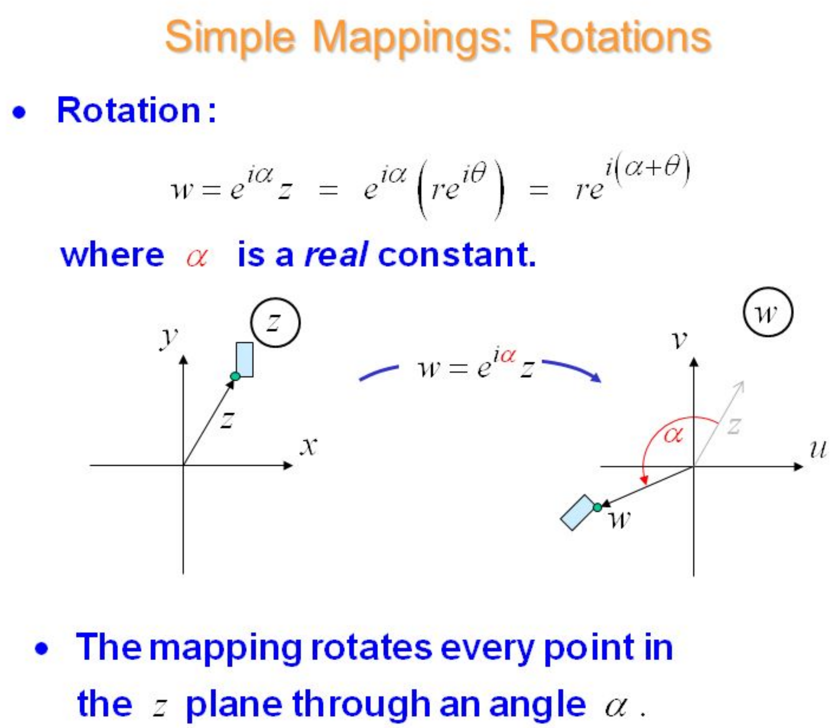
4. **Dominio:** Es un abierto conexo.

Funciones básicas en el plano complejo.

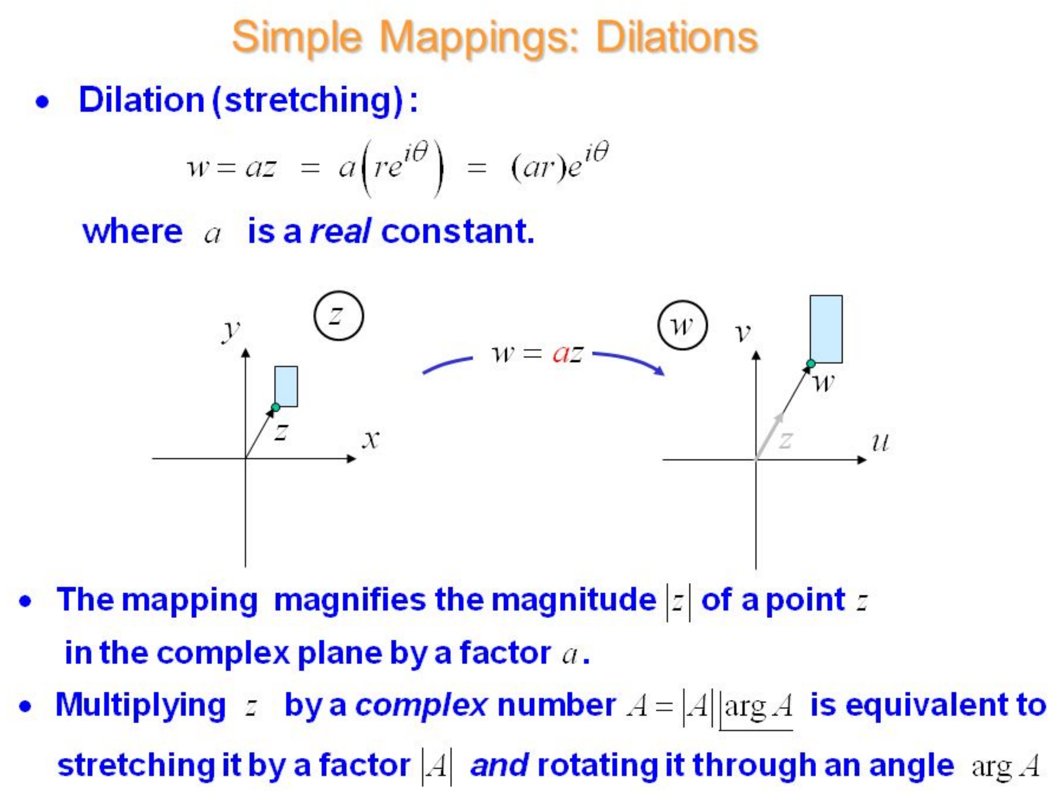
1. **Traslación:** $f(z) = z + a;\ a \in \mathbb{C}$.



2. **Rotación:** $f(z) = e^{i\alpha}z;\ \alpha \in \mathbb{R}$.



3. Dilatación o Contracción: $f(z) = az;\ a \in \mathbb{R};\ a > 0$**.**

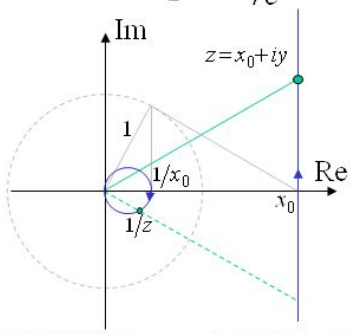


4. Inversión: $f(z) = \dfrac{1}{z}$**.**

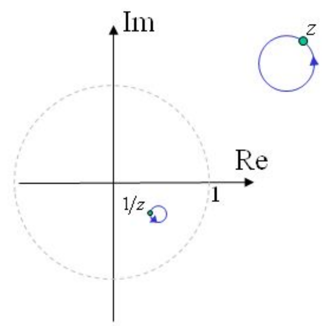
Simple Mappings: Inversions

- **Inversion:**

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{r}$$



The straight line $z = x_0 + iy$ maps to a circle

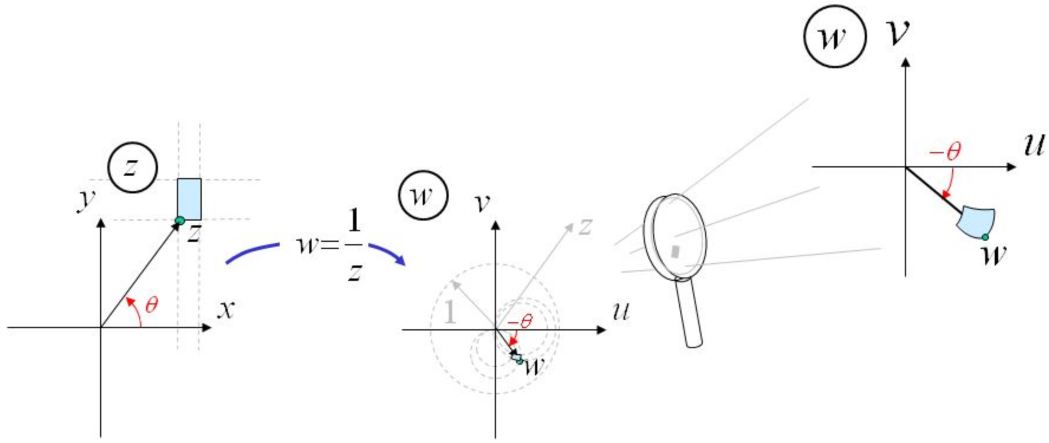


Inversion circle-preserving property

- **Inversions have a "circle preserving" property, i.e., circles always map to circles (straight lines are "circles" of infinite radius).**
- **Points *outside* the unit circle map to points *inside* the unit circle and vice versa.**

Simple Mappings: Inversions, cont'd

- **Geometrical construction of the inversion** $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{e^{-i\theta}}{r}$



1.7. Transformaciones de Möbius o fraccionales lineales.

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}; \qquad ad - bc = 1; \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Esta función tiene una inversa, $f^{-1}(z) =$?. Para encontrarla utilizamos la siguiente identificación (isomorfismo)

T. de Möbius $\leftrightarrow$ Matrices invertibles $2x2$.

Lo que significa:

$$\frac{az+b}{cz+d} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Si se invierte la matriz del lado derecho, queda como:

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \frac{1}{ad-bc}.$$

Entonces: $f^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$.

En efecto, se puede verificar fácilmente que $(f \circ f^{-1})(z) = z$ (Ejercicio).

Proposición 7. Una transformación de Möbius es la compuesta de traslaciones, dilataciones, rotaciones e inversiones.

Demostración.

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d}.$$

■

Una mejor interpretación de la fórmula anterior es la siguiente:

$$\begin{aligned}
z &\rightarrow |c|\, z \rightarrow |c|\, e^{iArg(c)} z \\
&= cz \rightarrow cz + d \rightarrow \frac{1}{cz+d} \rightarrow \left|\frac{bc-ad}{c}\right| \frac{1}{cz+d} \\
&\rightarrow \left|\frac{bc-ad}{c}\right| e^{\frac{bc-ad}{c}} \frac{1}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d} \\
&\rightarrow \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d} = \frac{az+b}{cz+d}
\end{aligned}$$

Entonces: $S(z) = (T \circ R \circ D \circ I \circ T \circ R \circ D)(Z)$.

Finalmente, se puede apreciar este resultado en el siguiente video: https://www.youtube.com/watch?v=JX3VmDgiFnY.

El siguiente resultado es también importante:

Proposición 8. Una transformación de Möbius está únicamente determinada por la imagen de tres puntos distintos.

Demostración.

- Unicidad: Sean S y T transformaciones de Möbius tales que:

$$S(z_1) = w_1 \qquad T(z_1) = w_1 \rightarrow z_1 = T^{-1}(w_1)$$

$$S(z_2) = w_2 \qquad T(z_2) = w_2 \to z_2 = T^{-1}(w_2)$$

$$S(z_3) = w_3 \qquad T(z_3) = w_3 \to z_3 = T^{-1}(w_3)$$

Por demostrar: $S = T$.

En efecto, ya que S y T son invertibles, tenemos:

$$S(T^{-1}(w_1)) = w_1 \to (S \circ T^{-1})(w_1) = w_1$$

$$S(T^{-1}(w_2)) = w_2 \to (S \circ T^{-1})(w_2) = w_2$$

$$S(T^{-1}(w_3)) = w_3 \to (S \circ T^{-1})(w_3) = w_3$$

Por lo tanto $S \circ T^{-1}$ tiene 3 puntos fijos.

Encontremos ahora todos los puntos fijos de una transformación de Möbius

$$\frac{az + b}{cz + d} = z$$

Por lo tanto, los puntos fijos son las soluciones de la ecuación:

$$\begin{aligned} az + b = z(cz + d) \;&\Leftrightarrow\; az + b = cz^2 + dz \\ &\Leftrightarrow\; cz^2 + z(d - a) - b = 0 \end{aligned}$$

que son a lo más 2.

Para que tenga más de 2 puntos fijos, la Transformación de Möbius que sirve es $T(z) = z = Id(z)$. Entonces:

$$S \circ T^{-1} = Id \Rightarrow S = T.$$

- Existencia: Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distintos y $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ distintos.

  Sea:

$$S(z_1) = w_1$$

$$S(z_2) = w_2$$

$$S(z_3) = w_3$$

  Nos preguntamos:

  ¿Cuánto es $S(z)$, para cualquier z?

  Basta encontrar una Transformación que lleve z_1 en 0, z_2 en 1 y z_3 en ∞. Así:

$$T(z) = z - z_1, \qquad (a = 1, b = -z_1, c = 0, d = 1)$$

  lleva z_1 en 0, mientras que

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \qquad (a = 1, b = -z_1, c = 0, d = z_2 - z_1)$$

  lleva z_1 en 0 y z_2 en 1, por último

$$T(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}, \qquad (a = z_2 - z_3,\ b = -z_1(z_2 - z_3),\ c = z_2 - z_1,\ d = -z_3(z_2 - z_1))$$

  lleva z_1 en 0, z_2 en 1 y z_3 en ∞.

  De la misma manera, la transformación

$$W(z) = \frac{(z - w_1)(w_2 - w_3)}{(z - w_3)(w_2 - w_1)}$$

  lleva w_1 en 0, w_2 en 1 y w_3 en ∞.

  Luego, la transformación de Möbius buscada es:

$$S(z) = (W^{-1} \circ T)(z)$$

■

Teorema 9. *Una Transformación de Möbius lleva círculos o rectas en círculos o rectas.*

Demostración. Sea C un círculo con ecuación

$$z\overline{z} + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + k_0 = 0; \qquad k_0 \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Consideremos las funciones básicas:

1. $T(z) = z + b$
2. $T(z) = az; \qquad a \in \mathbb{C}, a = re^{i\theta}$
3. $T(z) = \dfrac{1}{z}$

Si $z = w - b$, el circulo queda como:

$$\begin{aligned} & (w-b)\overline{(w-b)} + \overline{\alpha}(w-b) + \alpha\overline{(w-b)} + k_0 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & w\overline{w} - w\overline{b} - b\overline{w} + b\overline{b} + \overline{\alpha}w - \overline{\alpha}b + \alpha\overline{w} - \alpha\overline{b} + k_0 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & w\overline{w} + (-\overline{b} + \overline{\alpha})w + (-b+\alpha)\overline{w} + b\overline{b} - (\overline{\alpha}b + \alpha\overline{b}) + k_0 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & w\overline{w} + (-\overline{b} + \overline{\alpha})w + (-b+\alpha)\overline{w} + b\overline{b} - 2Re(\overline{\alpha}b) + k_0 = 0 \end{aligned}$$

que es nuevamente la ecuación de un circulo.

Si $w = az$, entonces el circulo queda como:

$$\begin{aligned} & \frac{w}{a}\frac{\overline{w}}{\overline{a}} + \overline{\alpha}\frac{w}{a} + \alpha\frac{\overline{w}}{\overline{a}} + k_0 = 0 \qquad /a\overline{a} \\ \Leftrightarrow\ & w\overline{w} + \overline{\alpha a}w + \alpha a\overline{w} + k_0 a\overline{a} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & w\overline{w} + \overline{\alpha a}w + \alpha a\overline{w} + k_0 \mid a \mid^2 = 0 \end{aligned}$$

que corresponde también a la ecuación de un circulo.
Si $w = \dfrac{1}{z}$, entonces el circulo se transforma en:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} + \overline{\alpha}\frac{1}{w} + \alpha\frac{1}{\overline{w}} + k_0 = 0 \qquad /w\overline{w} \\ \Leftrightarrow\ & 1 + \overline{\alpha w} + \alpha w + k_0 w\overline{w} = 0 \end{aligned}$$

Ahora bien, si $k_0 = 0$, entonces la inversión lleva el círculo a una recta. Por otro lado, si $k_0 \neq 0$, entonces lo transforma en un círculo.

La parte de considerar inicialmente una recta L queda de ejercicio. ■

Capítulo 2

Funciones de Variable Compleja

2.1. Funciones analíticas

Definición 1. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función definida en un abierto en $\mathbb{C}$ y sea $z_0 \in \Omega$. Se dice que $f(z)$ es derivable en z_0 (u holomorfa o analítica) si existe el límite:*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Observacion 2. Una función f se dice analítica en un abierto Ω si es analítica en cada punto de Ω.

Proposición 3. *Si f es holomorfa en z_0 entonces f es continua en z_0.*

Demostración. $|f(z) - f(z_0)| = (z - z_0)\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \to 0 \cdot f'(z_0) = 0.$

■

Ejemplo 4. 1) $f(z) = a,\ a \in \mathbb{C}$. Calculamos el cuociente

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{a - a}{z - z_0} = 0$$

Tomando el límite cuando $z \to z_0$, se obtiene $f'(z_0) = 0$.

2) $f(z) = z$. Se tiene

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1$$

Luego, f es holomorfa en $\mathbb{C}$ y $f'(z) = 1$.

3) $g(z) = z^n$, n entero positivo.

Calculamos el cuociente

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + ... + z_0^{n-1}$$

Tomando el límite cuando $z \to z_0$, obtenemos $g'(z_0) = nz_0^{n-1}$.

4) Sea $h(z) = \overline{z}$, Vamos a ver que h no es derivable en $z_0 = 0$. Queremos ver si

$$\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z}$$

existe o no. Si el límite existe, debe ser el mismo, no importa como nos aproximamos a 0.

Para $z \in \mathbb{R}$, $z = t$, tenemos $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{t}{t} = 1$.

Para z imaginario, $z = it$, tenemos $\lim_{t \to 0} \dfrac{-it}{it} = -1$.

Por lo tanto h no es analítica en $z = 0$.

Consideremos ahora a $(\mathbb{AF}, +, \cdot, \circ)$ el conjunto de las funciones analíticas con la suma, el producto y la composición de funciones.

Dadas f y g funciones analiÃĆÂŋticas, recordemos las siguientes definiciones:

$$(f+g)(z) := f(z) + g(z)$$

$$(f \cdot g)(z) := f(z) \cdot g(z)$$

$$(f \circ g)(z) := f(g(z))$$

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5. *Si f y g son analiticas, entonces:*

1) La suma de funciones es analitica y se tiene: $(f+g)' = f' + g'$;

2) El producto de funciones es analitico y se tiene $(fg)' = f'g + fg'$;

3) La inversa multiplicativa es analitica y se tiene $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$ *cuando* $g \neq 0$;

4) El cuociente es analitico y se tiene $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ *cuando* $g \neq 0$.

Demostración.

1) Tenemos

$$\frac{(f+g)(z) - (f+g)(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

Si tomamos el límite para $z \to z_0$ obtenemos la fórmula deseada.

2) $$\frac{(fg)(z) - (fg)(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z) + f(z_0) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

Tomamos el límite para $z \to z_0$ y usamos el hecho de que g es continua en z_0, obteniendo

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

3) Usando 2)

$$0 = \left(g\frac{1}{g}\right)' = g'\frac{1}{g} + g\left(\frac{1}{g}\right)'$$

Luego,

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

4)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\frac{-g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$\blacksquare$

Corolario 6. *Toda función racional* $r(z) = \dfrac{a_n z^n + ... + a_0}{b_m z^m + ... + b_0}$ *es derivable en el abierto* $\Omega = \{z : b_m z^m + ... + b_0 = 0\}$ *. En particular, la función* $\dfrac{1}{z}$ *es derivable en* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$*.*

Ejemplo 7. Sea $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$; $ad-bc = 1$. Se observa que g es derivable, excepto en $z_0 = \dfrac{-d}{c}$, además:

$$g'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

En efecto,

$$g'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Definición 8. *Diremos que* $f(z)$ *es derivable en* $z_0 = \infty$ *si la función* $g(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ *es derivable en* $z_0 = 0$*. En tal caso se define*

$$f'(\infty) := g'(0).$$

Observación. Lo anterior también se puede aplicar a funciones continuas.

Ejemplo 9.

$$f(z) = \frac{z+2}{3z^2-1}$$

Tenemos

$$g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t}+2}{\frac{3}{t^2}-1} = \frac{t+2t^2}{3-t^2}$$

luego $g'(t) = \dfrac{(1+4t)(3-t^2)+2t(t+2t^2)}{(3-t^2)^2}$, de donde $g'(0) = \dfrac{1}{3}$. Por lo tanto $f'(\infty) = \dfrac{1}{3}$.

Teorema 10. *La composición de funciones analiticas es analitica y se tiene:*

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z).$$

Demostración.

$$\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{z - z_0} = \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{g(z) - g(z_0)} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

■

2.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Recordemos que f es diferenciable en un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ si existe una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = L(x - x_0, y - y_0) + e(x - x_0, y - y_0)$$

donde

$$\frac{e(x-x_0, y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \to 0$$

cuando $x \to x_0$ y $y \to y_0$, esto es, el error es pequeño comparado con la norma. Observar que $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal cuya matriz, con respecto a las bases canónicas, es:

$$[L] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

La prueba del siguiente resultado se estudia en otros cursos de cálculo, por lo que no se demostrará aquiÂŋ.

Teorema 11. *Si* $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ *existen y son continuas en* (x_0, y_0) *entonces* f *es diferenciable en ese punto.*

La siguiente es una de las principales caracterizaciones de funciones analiticas.

Teorema 12. *(Ecuaciones de Cauchy-Riemann) Sea* $f = u + iv$ *una función diferenciable en* $z_0 = (x_0, y_0)$*. Entonces* f *es holomorfa en* z_0 *si y sólo si se cumplen las ecuaciones:* $\dfrac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(z_0)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(z_0) = \dfrac{-\partial v}{\partial x}(z_0)$ *en el punto* (x_0, y_0)*.*

Demostración.

($\Rightarrow$)Por definición, se tiene que

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(z_0+t)-f(z_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(z_0+it)-f(z_0)}{it}$$

equivalentemente

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\frac{u(z_0+t)+iv(z_0+t)-u(z_0)-iv(z_0)}{t}\\ =\ &\frac{1}{i}\lim_{t\to 0}\frac{u(z_0+it)+iv(z_0+it)-u(z_0)-iv(z_0)}{t}\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\left[\frac{u(z_0+t)-u(z_0)}{t}+i\frac{v(z_0+t)-v(z_0)}{t}\right]\\ =\ &\frac{1}{i}\lim_{t\to 0}\left[\frac{u(z_0+it)-u(z_0)}{t}+i\frac{v(z_0+it)-v(z_0)}{t}\right].\end{aligned}$$

Observar que cuando $t\to 0$

$$\frac{u(z_0+t)-u(z_0)}{t}=\frac{u(x_0+t,y_0)-u(x_0,y_0)}{t}\longrightarrow\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$$

y

$$\frac{u(z_0+it)-u(z_0)}{t}=\frac{u(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)}{t}\longrightarrow\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Reemplazando, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)=\frac{1}{i}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\right].$$

Luego

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

y

$$-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

($\Leftarrow$) Como f es diferenciable, existe

$$Df(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

tal que

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+Df(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ \\ y-y_0 \end{pmatrix}+e(x-x_0,y-y_0),$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right) &= u\left(x_0,y_0\right)+iv\left(x_0,y_0\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right) \\ &+ \frac{\partial u}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right) \\ &+ i\left[\frac{\partial v}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right)\right] \\ &+ e\left(x-x_0,y-y_0\right). \end{aligned}$$

Por hipótesis

$$\begin{aligned} & f\left(z\right)-f\left(z_0\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\left(z_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\left(z_0\right)\left(y-y_0\right) \\ & +i\left[-\frac{\partial u}{\partial y}\left(z_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{\partial u}{\partial x}\left(z_0\right)\left(y-y_0\right)\right]+e\left(x-x_0,y-y_0\right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(z)-f(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)(z-z_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)(z-z_0)+e(x-x_0,y-y_0)$$

Entonces

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)+\frac{e(x-x_0,y-y_0)}{z-z_0}$$

Tomamos el límite cuando $z\to z_0$, y nos queda

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}+\lim_{z\to z_0}\frac{e(x-x_0,y-y_0)}{z-z_0}$$

Ya que $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{e(x-x_0,y-y_0)}{z-z_0}=0$, se obtiene que existe $f'(z_0)$ lo cual concluye la demostración.

■

Observacion 13.

De la demostración del teorema anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)\\ &= i\left[\frac{\partial v}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial y}\right](z_0). \end{aligned}$$

Ejercicio 14. *1) Pruebe que, en coordenadas polares, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se escriben como* $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=-r\dfrac{\partial v}{\partial r}$ *y* $\dfrac{\partial v}{\partial \theta}=r\dfrac{\partial u}{\partial r}$.

2) Pruebe que, en notación compleja, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se escriben como $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$.

Definición 15. *Sea* $p:\Omega\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ *una función. La función* p *se dice armónica si*

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0$$

Notación: $\Delta p:=\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}$ se le llama el operador de Laplace, o Laplaciano, de p.

2.3. Algunas funciones de variable compleja.

I. **Función exponencial.** Se define como:

$$e^z := e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Propiedades

1) e^z es una función analítica en $\mathbb{C}$.
2) $(e^z)' = e^z$
3) $e^0 = 1$, $e^{2\pi i n} = 1 \forall n \in \mathbb{Z}$
4) $e^{z+w} = e^z e^w$
5) $e^z \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$
6) $|e^{iy}| = 1$, $|e^z| = e^x$

Para una visualización de esta función nos remitimos a:

https://www.geogebra.org/m/hBdfFdvg

Teorema 16. *Sea $k \in \mathbb{C}$. La única solución de la ecuación $f'(z) = kf(z)$ con condición inicial $f(0) = A \in \mathbb{C}$ es:*

$$f(z) = Ae^{kz}$$

Demostración. Observe que $f'(z) = Ake^{kz} = kf(z)$ y por lo tanto $f(z)$ definida como arriba satisface a la ecuación. Demostremos ahora la unicidad de la solución. Sea g otra función que satisface $g'(z) = kg(z)$ con $g(0) = A$. Puesto que:

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2} = \frac{kfg - kgf}{g^2} = 0.$$

concluimos que $\dfrac{f}{g}$ es constante. Pero: $\dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{A}{A} = 1$. Por lo tanto $f = g$.

■

II. **Funciones trigonométricas.** Se definen como:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Propiedades

1) $(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z$

2) $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi, \qquad \cos z = 0 \Leftrightarrow z = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

3) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w,$

$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$

4) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

Teorema 17. *Las soluciones de la ecuación* $f''(z) + kf(z) = 0$*;* $k \in \mathbb{C}$ *son de la forma:* $f(z) = A\cos(\sqrt{k}z) + B\sin(\sqrt{k}z)$.

Demostración. Calculamos la primera y la segunda derivada de f:

$$f'(z) = -A\sqrt{k}\sin(z\sqrt{k}) + B\sqrt{k}\cos(z\sqrt{k})$$

$$f''(z) = -A\sqrt{k}\sqrt{k}\cos(z\sqrt{k}) - B\sqrt{k}\sqrt{k}\sin(z\sqrt{k}) = -kf(z)$$

con lo que queda demostrado el teorema.

■

III. **Función raíz enésima** Se define como:

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

en $\Omega := \left\{z = re^{i\theta} / -\pi < \theta < \pi, \;\; r > 0\right\}$.

Proposición 18. *$\sqrt[n]{z}$ es analítica en Ω.*

Demostración. Ocupando las ecuaciones de Cauchy-Riemann en su forma polar, tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

Considerando $u(r,\theta) = r^{\frac{1}{n}} \cos\frac{\theta}{n}$ y $v(r,\theta) = r^{\frac{1}{n}} \sin\frac{\theta}{n}$, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} \cos\frac{\theta}{n} \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}} \cos\frac{\theta}{n}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{-r^{\frac{1}{n}}}{n} \sin\frac{\theta}{n} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} \sin\frac{\theta}{n}.$$

■

IV. **Funciones hiperbólicas** Se definen las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico como sigue:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Propiedades

1) $(\sinh z)' = \cosh z, \qquad (\cosh z)' = \sinh z$

2) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

3) $\cosh(z + w) = \cosh z \cos w + \sinh z \sinh w,$

$\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \sinh z \cosh w$

4) $\sinh(iz) = i \sin z, \qquad \cosh(iz) = \cos z$

Teorema 19. *Las soluciones de la ecuación $f''(z) = kf(z)$; $k \in \mathbb{C}$ son de la forma: $f(z) = A\cosh(\sqrt{k}z) + B\sinh(\sqrt{k}z)$.*

V. **Función logaritmo.** Se define la función logaritmo como:

$$\ln z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}$$

donde $z \in \Omega$.

Propiedades

1) La función logaritmo es analítica en Ω.

2) $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$

3) $e^{\ln z} = z$, para todo $z \in \Omega$.

VI. **Función potencia.** La función potencia se define como:

$$z^w = e^{w \ln z},$$

para cada $w \in \Omega$.

Propiedades

1) La función potencia es analítica en Ω.

2) $\dfrac{d(z^w)}{dz} = wz^{w-1}$

Ejemplo: Calcular i^i.

Solución: Aplicando la definición de la función logaritmo, queda:

$$\ln i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = \frac{i\pi}{2}$$

Entonces $i^i = e^{i(i\frac{\pi}{2})} = e^{\frac{-\pi}{2}}$.

Ejercicio 20. *Calcule* i^{i^i}.

Capítulo 3

Series

3.1. Series de Taylor

A continuación recordamos un resultado básico en series de potencias.

Teorema 21. *Consideremos*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad\qquad R := \frac{1}{\text{lím}_{n\to\infty}(\sqrt[n]{|a_n|})}$$

donde R es el radio de convergencia de la serie. Entonces:

(a) Para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| < R$, la serie converge (absolutamente).

(b) Para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| > R$, la serie diverge.

(c) La serie converge uniformemente en subconjuntos compactos (i.e. cerrados y acotados) del disco

$$D(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \quad |z - z_0| < R\}.$$

Uno de los resultados principales hacia una nueva caracterización de funciones analíticas es el siguiente teorema.

Teorema 22. *Suponga que* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *es convergente en* $D(0,R)$*. Entonces la función*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

es analítica en $D(0,R)$ *y, además,*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

que es también convergente en $D(0,R)$*.*

Demostración.

Sea $z_0 \in D(0,R)$ y analicemos la siguiente diferencia:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^n \right| &= \left| \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n}{z - z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} \right| \\
&\leq \left| \frac{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum\limits_{n=0}^{N} a_n z_0^n}{z - z_0} - \sum_{n=1}^{N} n a_n z_0^{n-1} \right| \\
&+ \left| \sum_{n=0}^{N} n a_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} \right| \\
&+ \left| \frac{\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n - \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n z_0^{n-1}}{z - z_0} \right|
\end{aligned}$$

El primer término tiende a cero cuando z tiende a z_0, ya que es la derivada del polinomio

$$p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n.$$

El segundo término tiende a cero cuando N tiende a infinito, ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ converge, lo que demostraremos más adelante.

Para el tercer término se tiene que:

$$\left| \frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z_0^n}{z - z_0} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right|$$

Pero,

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \underbrace{z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + z^{n-3} z_0^2 + ... + z_0^{n-1}}_{n-veces}$$

Por lo tanto,

$$\left| \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right| \leq |z|^{n-1} + |z|^{n-2}|z_0| + |z|^{n-3}|z_0|^2 + \cdots + |z_0|^{n-1}$$

Ya que $D(0, R)$ es abierto, existe un $r < R$, tal que para $|z| < r$ se tiene:

$$\left| \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right| \leq r^{n-1} + r^{n-2} r + r^{n-3} r^2 + \cdots + r^{n-1}$$

Por lo tanto,

$$\left| \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right| \leq n r^{n-1}$$

Luego

$$\left|\frac{\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z_0^n}{z - z_0}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}\right|$$
$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n\,|a_n|\, r^{n-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Esto prueba que f es analitica en z_0 y la primera parte del teorema. Finalmente, veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ converge en $D(0,R)$. En efecto: Calculamos el radio de convergencia R' obteniendo

$$R' = \frac{1}{\text{lím}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\text{lím}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\text{lím}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

Esto prueba que la serie converge en el disco $D(0,R)$ lo que demuestra el teorema.

∎

Ejemplo 23. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ y observemos que converge en $\mathbb{C}$, esto es $R = \infty$. Por el teorema, sabemos que f es analítica en $\mathbb{C}$, y además se tiene

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

Haciendo $m = n-1$, tenemos:

$$f'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}$$

De lo anterior se puede observar que, $f'(z) = f(z)$ y $f(0) = 1$, entonces $f(z) = e^z$ y por lo tanto,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Observación. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.
Sea $g(z) = f'(z)$, entonces

$g'(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$

Sea $h(z) = g'(z)$, entonces

$h'(z) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) z^{n-3}$

$\vdots$

Detengámonos a analizar las funciones anteriores:

$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots \Longrightarrow f(0) = a_0$

$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \cdots \Longrightarrow f'(0) = a_1$

$f''(z) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 z + 4 \cdot 3a_4 z^2 + \cdots \Longrightarrow f''(0) = 2a_2$

$f'''(z) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 z + \cdots \Longrightarrow f'''(0) = 3 \cdot 2a_3$

$\vdots$

$f^{(n)}(0) = n! a_n$

Por lo tanto

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Corolario 24. *Si $f(z)$ es analítica, entonces f es de clase C^∞.*

3.2. Representaciones por series de Taylor y Serie Geométrica

1. Función exponencial:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

2. Función seno:

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
&= \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n - (-i)^n}{n!} z^n
\end{aligned}$$

Analicemos la expresión $(i)^n - (-i)^n$:

- Si n es par: $(i)^{2k} - (-1)^{2k}(i)^{2k} = (i)^{2k}[1 - (-1)^{2k}] = 0$
- Si n es impar: $(i)^{2k+1} - (-1)^{2k+1}(i)^{2k+1}$

$$= (i)^{2k} i[1 - (-1)^{2k}(-1)] = 2(i)^{2k} i = (i^2)^k 2i = (-1)^k 2i$$

Entonces

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. Función coseno:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) z^{2n}}{(2n+1)(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

4. Función seno hiperbólico:

Sabemos que $\sinh iz = i \sin z$, para todo z, en particular para $w = iz$, entonces $\sinh w = i \sin(-iw)$.

Por lo tanto

$$\sinh z = i \sin(-iz) = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Analicemos:

$$\begin{aligned}(-iz)^{2n+1} &= (-i)^{2n+1} z^{2n+1} = (-1)^{2n}(-1)[i^2]^n i z^{2n+1} \\ &= (-1)(-1)^n i z^{2n+1} = (-i)(-1)^n z^{2n+1}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sinh z &= -i^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

5. Función coseno hiperbólico:

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) z^{2n}}{(2n+1)(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

6. Serie Geométrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$f''(z) = \frac{2}{(1-z)^3}$$

$$f'''(z) = \frac{3!}{(1-z)^4}$$

Por lo tanto tenemos que $f^n(0) = n!$. Luego, $a_n = \dfrac{f^n(0)}{n!} = 1$. Así tendremos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < R = 1$$

donde el radio de convergencia está dado por

$$R = \frac{1}{\text{lím} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1.$$

Otros ejemplos de identidades de series que se pueden deducir de la serie geométrica son:

i)
$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, |z| < 1$$

ii)
$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, |z| < 1$$

iii)
$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Sabemos que $(\ln(1+z))' = \dfrac{1}{1+z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, luego buscando la antiderivada (integrando) obtenemos:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}, \qquad |z| < 1$$

Lo mismo ocurre con $(\arctan z)' = \dfrac{1}{1+z^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$, ya que si buscamos (integramos) podemos ver que

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}.$$

3.3. Extensión y continuación analítica. Representaciones conformes

Recordemos que si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, para $|z-z_0| < R$, entonces, derivando, obtenemos

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)......(n-k+1)(z-z_0)^{n-k}$$

Sabemos que para todo $k = 0, 1, 2...$ las series tienen el mismo radio de convergencia. En particular, como vimos antes, tenemos

$$f^{(k)}(z_0) = n!a_k$$

o

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

La serie de potencias de la cual comenzamos, se puede entonces escribir como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

y se llama serie de Taylor en torno al punto $z = z_0$.

Consideremos $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función posible de ser expresada en terminos de una serie de Taylor, digamos

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

para $|x-x_0| < R$ ($x \in \mathbb{R}$), existe entonces una función analítica (única) definida por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(z-x_0)^n$$

para $|z - x_0| < R$ ($z \in \mathbb{C}$) tal que $f(x) = \Phi(x)$ para $|x - x_0| < R$, ($x \in \mathbb{R}$). La función f se denomina **Extensión Analítica** de Φ.

Ejemplo 25. *Conocemos la serie de Taylor de la función exponencial:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Se define entonces su extensión analítica como:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Calculamos el radio de convergencia y observamos que esta serie converge para todo $z \in \mathbb{C}$. Notemos ahora que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = f(z)$$

y $f(0) = 1$. Luego, concluimos que $f(z) = e^z$ como se esperaba.

A continuación analizaremos el concepto de prolongación (o continuación) analítica.

Sea R el radio de convergencia de una serie de Taylor de $f(z)$ en torno a un punto z_0. Si $|z - z_0| < R$, la serie de Taylor de $f(z)$ en torno a otro punto $z_1 \in D(z_0, R)$ converge ciertamente para $|z - z_1| < R - |z_1 - z_0|$. Sin embargo, puede haber un radio de convergencia mayor R_1.

Entonces, obtenemos como consecuencia, que se puede definir a la función analitica $f(z)$ como función, tambien analítica, en un dominio mayor del cual comenzamos. Este proceso se conoce como **Prolongación (o continuación) Analítica.**

Este concepto se entiende mejor a traves del siguiente ejemplo:

Ejemplo 26. *Consideremos la serie*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n. \tag{3.1}$$

Se ve fácilmente que su radio de convergencia es 1. De este modo $f(z)$ *esta definida para* $|z| < 1$.

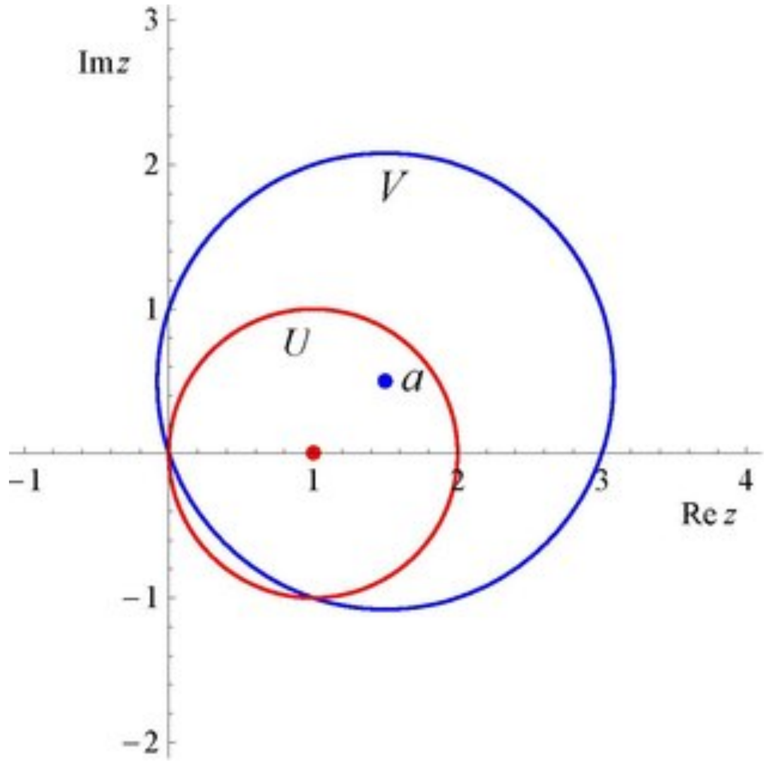
Consideremos ahora al punto $z_1 = 1/2$ *que se encuentra dentro del disco* $D(0,1)$.

Calculando los puntos correspondientes a a $f(\frac{1}{2}), f'(\frac{1}{2})$... *se obtiene* $\frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} = \frac{2}{3}(\frac{-2}{3})^n$ *y tenemos lo siguiente*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3}(\frac{-2}{3})^n (z - \frac{1}{2})^n$$

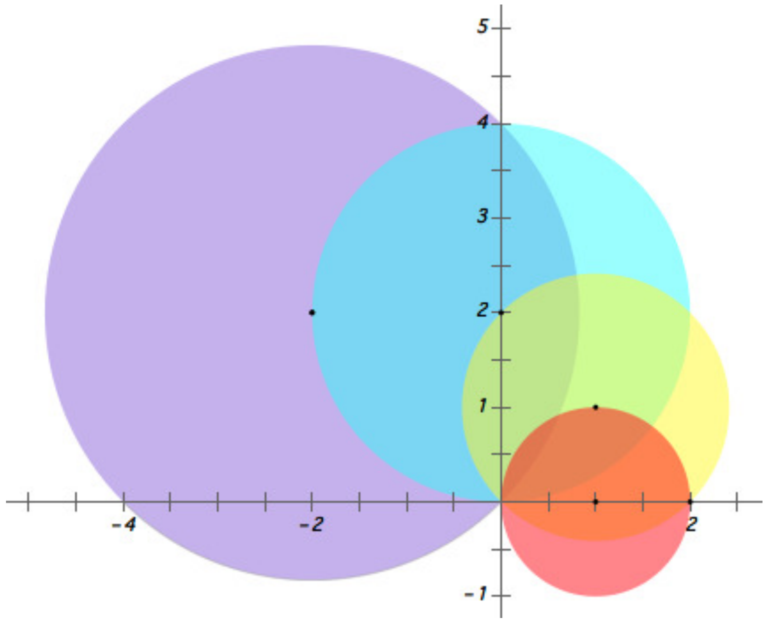
que corresponde a la función original $f(z)$ *en su expansión en serie de Taylor en torno al punto* z_1.

Si calculamos su radio de convergencia obtenemos $R = \frac{3}{2}$. *De este modo, hemos prolongado* $f(z)$ *al círculo* $|z - \frac{1}{2}| < \frac{3}{2}$ *que es exterior al círculo original* $|z| < 1$.



Concluimos, después de un análisis, que mediante una sucesión de círculos podemos cubrir cualquier punto del plano z distinto del $z = -1$.

Queda asi definida $f(z)$ como una funcion analítica para $z \neq 1$.



Esto se conoce como Prolongación Analítica.

De hecho, podemos concluir esto mismo de otra manera, observando que en el ejemplo se tiene en realidad:

$$f(z) = \frac{1}{1+z}.$$

Pero esto, obviamente, no es la generalidad de los casos. Un criterio muy importante que no demostraremos esta contenido en la siguiente observaciÃşn.

Observacion 27. *El radio de convergencia R de la serie de Taylor de una función $f(z)$ en torno a z_0 es igual a la distancia de z_0 a la singularidad más próxima de $f(z)$.*

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 28. *La serie de Taylor*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

de la función real $\dfrac{1}{1+x^2}$ *converge para* $|x|<1$, *pero diverge para* $x=1$, *aun cuando* $\dfrac{1}{1+x^2}$ *es indefinidamente derivable para todo valor de* x.

En efecto, observar que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 1^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

y por lo tanto diverge.

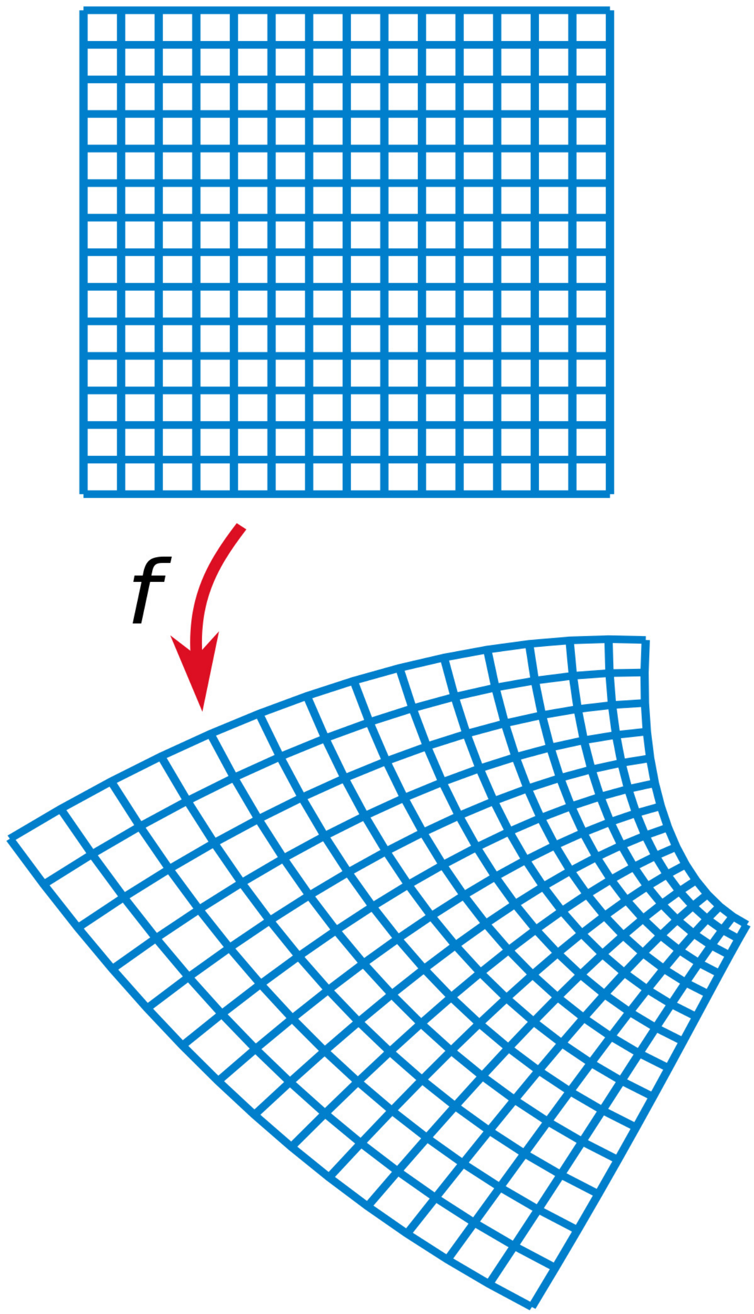
La explicación radica en la prolongación analitica de la función $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ *que tiene singularidades en* $z=\pm i$. *Luego su serie de Taylor* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ *en torno a* $z=0$ *tiene radio de convergencia* $R=1$.

Una observación adicional es la siguiente definición que se empezará a usar más adelante. Si $R=\infty$, *entonces la función* $f(z)$ *es analítica para todo* z. *Una tal función se llama* **entera.**

Finalmente, analizaremos brevemente el concepto de transformaciones conformes.

Definición 29. *Una función analitica* $f:\Omega\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, *se dice conforme si* $f'(z)\neq 0, \forall z\in\Omega$.

Observacion 30. *Si* f *es conforme, entonces* f *preserva los ángulos.*


f

Capítulo 4

Integración

4.1. Definición, propiedades y Teorema de Cauchy

Definición 31. *Un camino o curva regular es una función*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

con derivada continua y no nula.

Si pensamos en las curvas como conjuntos de puntos en $\mathbb{C}$ entonces trabajaremos con aquellas que son trazas de curvas regulares. Esto garantiza la existencia de rectas afines tangentes.

Definición 32. *Un cambio de parámetro es una función*

$$g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$$

que es biyectiva y con derivada continua tal que $g(\alpha) = a$ *y* $g(\beta) = b$.

Ejemplo 33. *1)* $\gamma(t) = (1-t)p + tq, \quad 0 \leq t \leq 1$

$\gamma'(t) = q - p$ *describe una recta desde el punto* p *al punto* q.

2) $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}, \ \ t \in [0, 2\pi]$ *describe una circunferencia de centro* z_0 *y radio* R.

3) $\gamma(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$ *describe una elipse.*

4) $\gamma(t) = (a\cosh(t), b\sinh(t))$ *describe una hipérbola.*

5) $\gamma(t) = a + b\cos(t), \quad t \in [a, b]$ *describe una cardioide.*

Definición 34. *Sea* $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *se define*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

donde $\gamma : [a, b] \to \Omega$ *es un camino regular.*

Proposición 35. *Si existe* F *tal que* $F' = f$, *entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \end{aligned}$$

∎

Corolario 36. *Si existe* F *tal que* $F' = f$ *y* γ *es una curva cerrada, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Teorema 37. *(De Green)*

Sea Ω un dominio abierto y conexo, cuya frontera es regular, entonces

$$\int_{\gamma=\partial\Omega}(Pdx+Qdy)=\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_{\gamma}f(z)dz &= \int_{\gamma}\left(\underbrace{f}_{P}dx+\underbrace{if}_{Q}dy\right)=\iint_{\Omega}\left(i\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy\\ &= 2i\iint_{\Omega}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy=2i\iint_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}dxdy\end{aligned}$$

Por lo cual, en notación compleja, el Teorema de Green puede ser expresado como

$$\int_{\gamma}f(z)dz=2i\int\int_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}dxdy.$$

Ejemplo 38.

$$\int_{\gamma}\bar{z}dz=2i\iint_{\Omega}dxdy=2i\ area\,(\Omega)$$

Teorema 39. *(De Cauchy) Sea f analiÂηtica en Ω, entonces:*

$$\int_{\gamma=\partial\Omega}f(z)\,dz=0.$$

4.2. Fórmula de Cauchy

Teorema 40. *(Fórmula de Cauchy) Sea f analítica en Ω con frontera regular γ y $z_0\in\Omega$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=f(z_0)$$

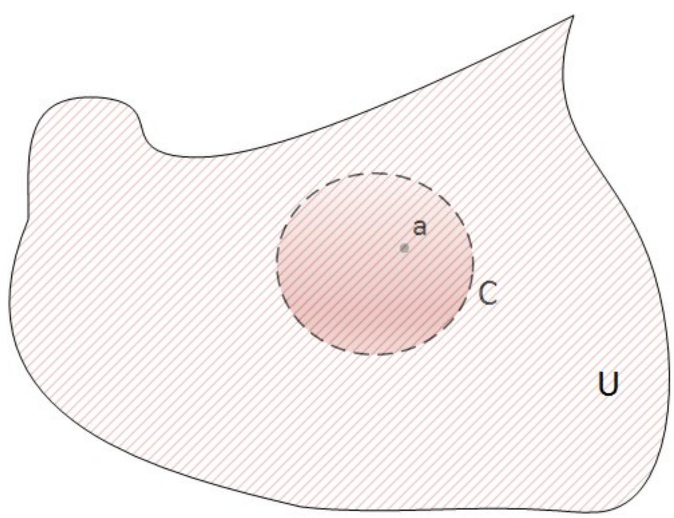
Demostración. Por el Teorema de Cauchy se tiene:

$$0=\int_{\partial(\Omega\setminus\mathbb{D}(z_0,r))}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_{\partial\Omega}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,r)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\frac{f(z)}{z-z_0}dz &= \int_{\partial\mathbb{D}(z_0,r)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{f\left(re^{i\theta}+z_0\right)}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta\\ &= i\int_0^{2\pi}f\left(re^{i\theta}+z_0\right)d\theta \xrightarrow[r\to 0]{} 2\pi i f(z_0)\end{aligned}$$

■



Ejemplo 41. *1) Calcular* $\displaystyle\int_{\gamma}\frac{1}{z^2-1}dz$*, donde* γ *es una circunferencia de centro* -1 *y radio* 1.

Podemos escribir la integral como

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-1)(z+1)}dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z+1}dz$$

con $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ *analítica en* γ *y en su interior. Considerando* $z_0 = -1$*, la integral toma el valor*

$$2\pi i f(-1) = 2i\pi(\frac{-1}{2}) = -\pi i$$

2) Si consideramos la integral anterior, pero con la región β*, que consiste de una circunferencia de centro* 0 *y radio* 4*, entonces podemos escribir*

$$\int_\beta \frac{1}{z^2-1}dz = \frac{1}{2}\left(\int_\beta \frac{1}{z-1}dz - \int_\beta \frac{1}{z+1}dz\right)$$

con $f(z) = 1$ *analítica en* β *la integral toma el valor*

$$\frac{1}{2}((2\pi i f(1)) - (2\pi i f(-1))) = 0$$

Teorema 42. *Una función* f *es analítica en* Ω *si y sólo si para todo* z_0 *en* Ω *existe una serie de potencias tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R$$

Demostración. ($\Leftarrow$) Queda demostrado por lo visto antes.

($\Rightarrow$) Dado z en un disco de centro z_0 y radio r contenido en Ω, empleamos la formula de Cauchy para obtener:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}dw, \quad C(t) = z_0 + re^{it}.$$

Observe que podemos escribir la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z_0}\frac{1}{[1-\frac{z-z_0}{w-z_0}]} \\ &= \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n}, \quad |z-z_0|<|w-z_0|.\end{aligned}$$

Reemplazando en la formula de Cauchy obtenemos:

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right]}_{a_n}(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.\end{aligned}$$

■

Corolario 43.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

4.3. Teoría del índice, homotopía y Teorema fundamental del cálculo

Comenzamos con la siguiente definición:

Definición 44. *Sea γ una curva cerrada, de clase C^1 y $z \in \mathbb{C}$. Se llama indice de z con respecto a la curva γ al número*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}dw.$$

La expresión anterior es la fórmula de Cauchy con $f(w) = 1$. Reescribiendo tenemos que

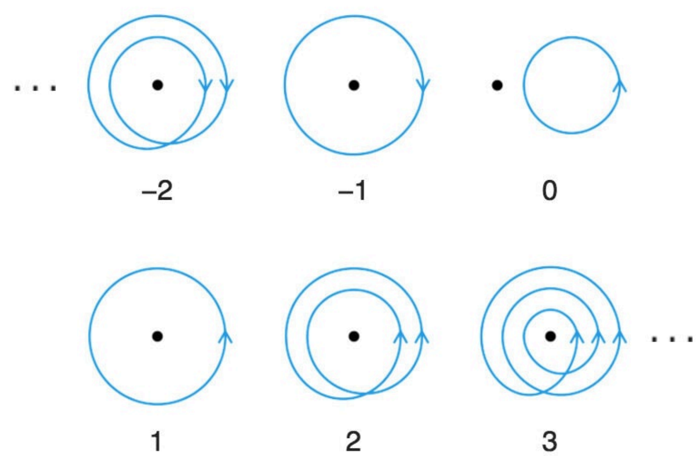
$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt, \quad \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

Observacion 45. *1) El índice indica "el número de vueltas" (winding number) que da la curva γ en torno a z, si $z \in Int(\gamma)$.*

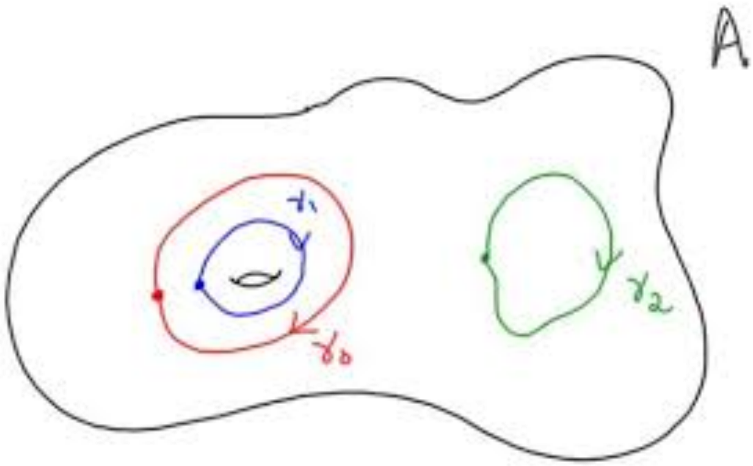
2) Si $z \in Ext(\gamma)$, entonces $Ind_\gamma(z) = 0$ (por teorema de Cauchy).

3) Si $Ind_\gamma(z) \neq 0$, entonces $z \in Int(\gamma)$.

4) $Ind_\gamma(z) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ si $z \in Int(\gamma)$.

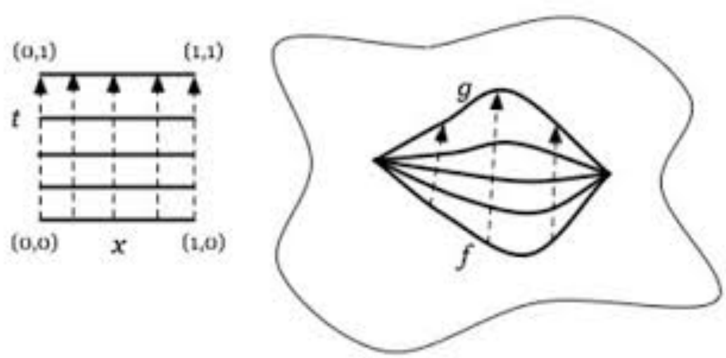


Definición 46. *Dos curvas cerradas cuyas trayectorias estan en un conjunto Ω se dice que son homótopas en Ω si pueden deformarse continuamente entre sí, sin que las deformaciones se salgan de Ω.*



Esta figura muestra tambien el caso en que no se cumple la homotopía, pues el agujero impide la deformación continua.

Mas precisamente, sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y γ_0 y γ_1 curvas cerradas en Ω. γ_0 es homótopa a γ_1 si existe una función continua $H : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega$ tal que $H(t, 0) = \gamma_0(t)$, $H(a, s) = H(b, s)$ y $H(t, 1) = \gamma_1(t), t \in [a, b]$, en tal caso se dice que t es una homotopía en Ω entre γ_0 y γ_1 y se denota $\gamma_0 \sim \gamma_1$.



Teorema 47. *(Invarianza del indice por homotopía) Si* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *abierto,* γ_0 *y* γ_1 *curvas cerradas en* Ω *tal que* $\gamma_0 \sim \gamma_1$*, entonces* $Ind_{\gamma_0}(z) = Ind_{\gamma_1}(z)$*.*

Teorema 48. *Si* γ_0 *y* γ_1 *son dos curvas cerradas en* Ω *y* $\gamma_0 \sim \gamma_1$*, entonces:*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

para cada función analítica f *en* Ω*.*

Demostración. Se debe demostrar que $\int_{\gamma_0 \setminus \gamma_1} f(z)dz = 0$, pero esto se sigue del Teorema de Cauchy. ∎

Los conceptos anteriores nos permiten dar la siguiente definición de manera formal.

Definición 49. *Un abierto* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *se dice simplemente conexo si es conexo y cualquier camino cerrado en* Ω *es homotópico a un punto en* Ω*.*

Con la definición anterior, estamos en condiciones de demostrar el siguiente resultado que corresponde a la contraparte en variable compleja del teorema fundamental del cálculo.

Teorema 50. *Sea* Ω *un conjunto simplemente conexo y sea* f *analítica en* Ω *entonces existe* F *tal que* $F' = f$*.*

Demostración. Sea z_0 cualquier punto en Ω. Sea $z \in \Omega$ y β un camino en Ω desde z_0 hasta z. Definimos

$$F(z) = \int_{\beta} f(s)ds \equiv \int_{z_0}^{z} f(s)ds.$$

Primero veamos que F está bien definida, esto es, es una función. En efecto, si α es otro camino desde z_0 hasta z, entonces el camino $\beta - \alpha$ va desde z_0 a z y luego vuelve a z_0, por lo cual es un camino cerrado en Ω que es simplemente conexo. Esto implica que $\beta - \alpha$ es homotópico a un punto, digamos z_0, que consiste del camino (cerrado) constante $\gamma(t) = z_0$. Luego, ya que f es analitica, deducimos del Teorema 48 que

$$\int_{\beta-\alpha} f(z)dz = \int_\gamma f\,(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = 0,$$

por lo cual

$$\int_\alpha f(s)ds - \int_\beta f(s)ds = 0,$$

esto es, F es una función, o sea el valor que toma es independiente del camino.

Ahora veremos que $F' = f$. Se observará en la demostración que sigue que solo requeriremos que f sea continua. Esta observación se utilizará mas adelante.

Calculamos para $h > 0$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{F\,(z+h) - F\,(z)}{h}\right) - f\,(z) &= \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f\,(s)\,ds - f\,(z) \\ &= \frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f\,(s) - f\,(z))ds.\end{aligned}$$

Como el valor de la integral es independiente del camino, sea $\gamma(t) =$

$z + th,\ t \in [0,1]$, un camino desde z a $z+h$. Entonces por definición:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}(f(s)-f(z))ds &= \frac{1}{h}\int_{0}^{1}(f(\gamma(t))-f(z))\gamma'(t)dt\\ &= \int_{0}^{1}(f(z+th)-f(z))dt \to 0\end{aligned}$$

cuando $h \to 0$ ya que f es continua. Esto prueba el teorema. ∎

4.4. Logaritmos, Teorema de Morera y Principio del Módulo Máximo

Comenzamos con el siguiente resultado que clarifica conceptualmente la noción de logaritmo.

Teorema 51. *Sea f una función analitica sin ceros, definida en un abierto simplemente conexo, entonces existe una función $g(z)$ tal que*

$$e^{g(z)} = f(z).$$

Esto es, existe el "logaritmo"de la función f lo cual se escribe simbólicamente como:

$$g(z) = \ln f(z).$$

Demostración. Consideremos la función $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, analitica por hipótesis. Definimos

$$g_1(z) := \int_{z_0}^{z}\frac{f'(s)}{f(s)}ds$$

es claro que g_1 no depende del camino, pues Ω es simplemente conexo. Por lo tanto g_1 es una función. Además

$$g_1'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

por el teorema anterior. Sea ahora $h(z) := e^{g_1(z)}$. Entonces

$$h'(z) = e^{g_1(z)} g_1'(z) = e^{g_1(z)} \frac{f'(z)}{f(z)} = h(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$$

así se obtiene

$$h'(z)f(z) - h(z)f'(z) = 0$$

luego

$$(\frac{h}{f})'(z) = 0$$

y por lo tanto

$$\frac{h(z)}{f(z)} = c$$

donde c es una constante.

Por lo tanto $h(z) = cf(z)$. Note además que $c \neq 0$ pues $h \neq 0$.

Asi, tendremos

$$f(z) = \frac{1}{c} e^{g_1(z)} = e^{g_1(z)+c_1}.$$

Por lo tanto si definimos

$$g(z) = g_1(z) + c_1$$

se satisface

$$e^{g(z)} = f(z),$$

lo que demuestra el teorema. ■

Ejemplo 52. *Sea* Ω:=$\mathbb{C}\backslash\{$*semieje real negativo*$\}$. *Sea* $f(z) = z^2$. *Entonces* $f(z)$ *es holomorfa y sin ceros en* Ω *simplemente conexo. Entonces existe* $\log(z^2)$. *Note que no se puede definir* $\log(z^2)$ *en* $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *pues no es simplemente conexo.*

Recordemos el teorema de Cauchy:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

si f es analitica y γ el borde del camino donde f está definida.

Nos preguntamos si existen otras funciones (que no sean analíticas) con la propiedad anterior. La respuesta es no. Este es el contenido del siguiente resultado

Teorema 53. *(Reciproco del Teorema de Cauchy, o Teorema de Morera) Si* f *es una función continua definida en* Ω *y tal que*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

para toda curva γ *en* Ω *tal que* γ *sea homotópica a un punto. Entonces* f *es analitica.*

Demostración. Sea $z_0 \in \Omega$. Por hipotesis,

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(w)dw$$

está bien definida en un disco $|z - z_0| < r$ contenido en Ω. Además $F'(z) = f(z)$ (esto es, existe la derivada, ya que para ello basta que f sea continua como vimos anteriormente).

Luego $F(z)$ es analitica (por definición) y por teorema previo, obtenemos:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad |z - z_0| < r$$

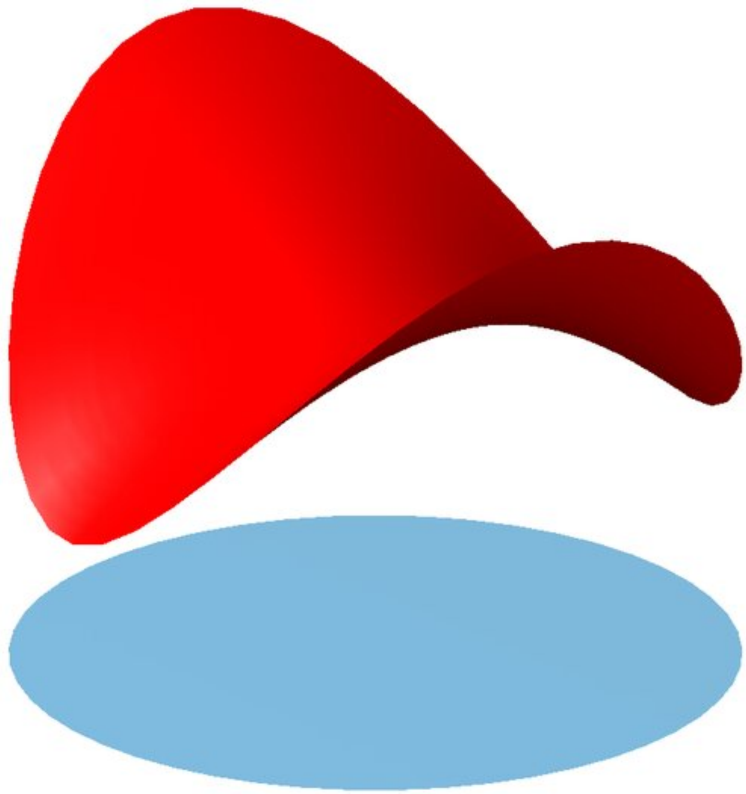
de donde

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad |z - z_0| < r.$$

Pero entonces f se puede representar como una serie de potencias. Esto implica, por teorema previo, que f es analitica, lo que demuestra el teorema. ∎

A continuación, veremos varios resultados teóricos muy importantes de la teoría de variable compleja.

Teorema 54. *(Principio del módulo Máximo) Sea f análitica en Ω y continua en $\partial\Omega$, entonces $|f(z)|$ no puede alcanzar su máximo en Ω, a menos que $f(z)$ sea constante.*



Otra manera de escribir el resultado es la siguiente:

$$\sup_{z\in\Omega} |f(z)| = \max_{w\in\partial\Omega} |f(w)|$$

Demostración. Observemos primero que $|f(z)|$ constante implica $f(z)$ constante. En efecto. Escribamos:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad z = x + iy$$

entonces es claro que

$$|f(z)|^2 = u(x,y)^2 + v(x,y)^2.$$

Ya que por hipótesis $|f(z)|$ es constante, obtenemos

$$0 = \frac{\partial(|f(z)|^2)}{\partial x} = 2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$
$$0 = \frac{\partial(|f(z)|^2)}{\partial y} = 2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + 2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

Así tendremos que

$$0 = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$0 = u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$

Ya que f es analitica, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann, obteniendo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Reemplazando, obtenemos

$$0 = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}$$

y

$$0 = -u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}$$

o bien, en forma de matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Distinguiremos dos casos:

- Caso 1: $u^2 + v^2 = 0$ (determinante de la matriz es cero).

  Entonces se tiene directamente:

$|f|^2 = u^2 + v^2 = 0$, luego $f \equiv 0$ y es por supuesto constante.

- Caso 2: $u^2 + v^2 \neq 0$.

Entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$.

Además, por las ecuaciones de Cauchy Riemann, concluimos que también se tiene $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Por lo tanto, concluimos que $u(x, y) = cte$ y $v(x, y) = cte$.

Se deduce que $f(z) = cte$. Esto prueba la afirmación.

Supongamos ahora que $|f(z)|$ alcanza su máximo en Ω y que no es idénticamente constante. Queremos llegar a una contradicción.

Por nuestra suposición, existe $z_0 \in \Omega$ donde $|f(z)|$ es máximo.

Sea γ la frontera de un círculo de centro z_0 y radio r contenido en Ω (que es abierto). Entonces, por nuestra suposición, se tiene

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| < |f(z_0)|$$

para cada $\theta \in (0, 2\pi)$.

Observemos ahora que la formula de Cauchy implica:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(s)}{s - z_0} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

donde hemos escogido $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Entonces

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = |f(z_0)|$$

lo cual implica que

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta.$$

Lo anterior es lo mismo que escribir:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{i\theta})|) d\theta = 0$$

donde el integrando es una cantidad positiva, por nuestra suposición. Luego debe ser cero, esto es:

$$|f(z_0)| = |f(z_0 + re^{i\theta})|$$

para cada $r > 0$. Pero esto implica entonces que $|f(z)|$ es constante. Por lo demostrado en la primera parte, esto dice que f es constante, lo cual es una contradicción. Esto prueba el teorema.

■

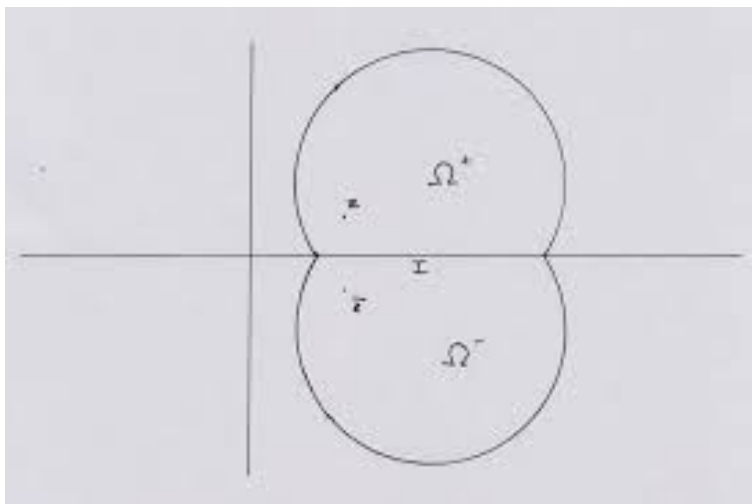
Una forma interesante de reescribir el principio del módulo maximo es la siguiente:

Corolario 55. *Si $f(z)$ es analítica en Ω y continua en $\partial\Omega$ y si $|f(z)| \leq M$ sobre $\partial\Omega$ entonces $|f(z)| < M$ en Ω, a menos que $f(z)$ sea constante.*

4.5. Principio de Reflexión de Schwartz

Un siguiente resultado importante de la teoría de variable compleja, que constituye una aplicación del teorema de Morera, es:

Teorema 56. *(Principio de reflexión de Schwarz) Sea f una función analitica definida en un abierto Ω con $[a,b] \subseteq \partial\Omega$, f además continua en $\Omega \bigcup [a,b]$. Suponemos que $f(x)$ es real si $a \leq x \leq b$. Entonces f se puede extender analiticamente al dominio $\Omega^* = \Omega \bigcup \overline{\Omega} \bigcup [a,b]$ donde $\overline{\Omega} := \{z/\overline{z} \in \Omega\}$. Además, en $\overline{\Omega}$ se tiene que $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$.*

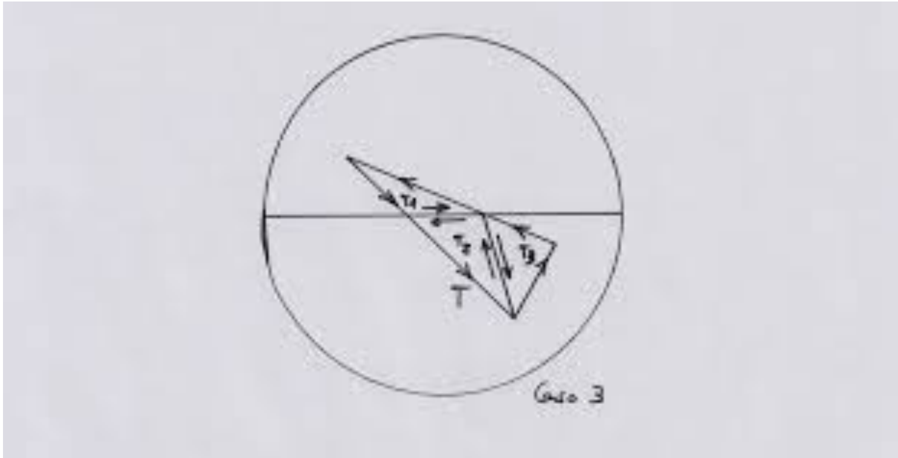


Demostración. Definimos

$$f^*(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \Omega \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{si } z \in \overline{\Omega} \end{cases}$$

Para demostrar que f^* es analitica en Ω^* ocuparemos el Teorema de Morera. Para ello, calculamos $\int_\gamma f^*(z)dz$ donde γ es una curva en Ω^* homotópica a un punto. Debemos demostrar que la integral es 0.

En efecto, si γ esta completamente contenida en Ω ó $\overline{\Omega}$ no hay problema y es claro que la integral es 0. Luego, hay que analizar el caso en que γ se encuentre en ambas.



En este último caso, separamos γ en dos caminos. Puesto que la integral sobre cada uno se anula, se obtiene:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_{1\epsilon}} f(z)dz + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_{2\epsilon}} f(z)dz = 0$$

Luego por el teorema de Morera, f es analitica. ■

Observacion 57. *Da lo mismo hacer una reflexión sobre el eje real o bien en una recta cualquiera. Por lo tanto, si f está definida por ejemplo en un rectángulo, por el principio de reflexión de Schwartz, es posible extenderla a todo el plano. Análogamente se podría hacer con un triángulo.*

Proposición 58. *(Desigualdad de Cauchy) Sea $f(z)$ una función analítica en $\mathbb{C}$ (entera). Entonces*

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n}M(r)$$

donde $M(r) = max_{|z|=r}|f(z)|$.

Demostración. Aplicando la fórmula de Cauchy para $z_0 = 0$, se tiene

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

donde C es el círculo $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Aplicando la definición, se obtiene

$$|f^{(n)}(0)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}rie^{i\theta}d\theta\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{r^n}d\theta$$
$$\leq \frac{n!}{2\pi r^n}M(r)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{n!M(r)}{r^n}.$$

■

Teorema 59. *(De Liouville) Sea $f(z)$ una función analítica, entera y acotada, entonces f es constante.*

Demostración. Como f es acotada

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n}M$$

donde $M = sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|$.

Luego haciendo $r \to \infty$ se obtiene $f^{(n)}(0) = 0$ para $n \geq 1$.

Como f es analítica,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + ...$$

Luego $f(z) = f(0)$, por lo tanto f es constante. ■

Teorema 60. *(Fundamental del Algebra) Todo polinomio no constante $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$ con $a_n \neq 0$ tiene n raíces en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Basta demostrar que tiene una raíz (luego se divide por ella y se obtiene un polinomio de grado menor donde se aplica de nuevo el resultado).

Supongamos, por absurdo, que $p(z)$ no tiene ninguna raíz en $\mathbb{C}$. Entonces la función $h(z) := \dfrac{1}{p(z)}$ es analítica en $\mathbb{C}$ (entera). Vamos a demostrar que $h(z)$ (y luego $p(z)$) es constante. Para ese objetivo, usaremos el teorema de Liouville y basta probar que h es acotada.

En efecto:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty}\frac{1}{p(z)} &= \lim_{z\to\infty}\frac{1}{a_n z^n + \ldots + a_0}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t^n}{a_n + a_{n-1}t + \ldots a_0 t^n}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego, dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que para cada $|z| \geq R$ se tiene

$$|h(z)| = \left|\frac{1}{p(z)}\right| \leq \epsilon.$$

Por otra parte, si $|z| \leq R$ entonces $|h(z)| \leq M$, pues h es continua y el conjunto $\{z : |z| \leq R\}$ es compacto. Por lo tanto $|h(z)| \leq \epsilon + M$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Luego h es acotada. ∎

Teorema 61. *(Valor Medio) Si f es analítica en un abierto Ω y $z_0 \in \Omega$ entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta,$$

para cada $r > 0$ tal que $\mathbb{D}(z_0, r) \subset \Omega$.

Demostración. Usamos la fórmula de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

donde C es el círculo $z = z_0 + re^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Entonces, por definición:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

■

Capítulo 5

Métodos de integración y aplicaciones

5.1. Desarrollo en serie de Laurent

Teorema 62. *Sea $f(z)$ una función analítica en un anillo (o corona) $r < |z - z_0| < R$. Entonces $f(z)$ se puede representar por una serie de la forma*

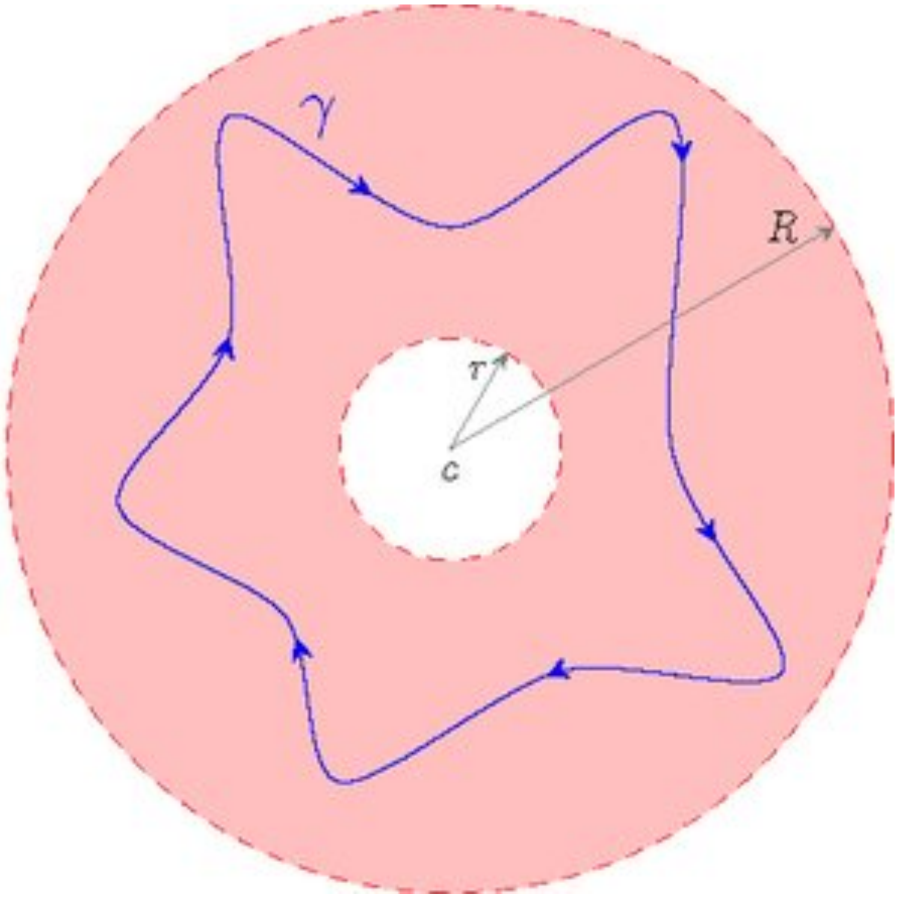
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

que converge uniformemente en compactos de ese anillo. Además:

(1) La primera serie converge en $|z - z_0| < R$;

(2) La segunda serie converge en $|z - z_0| > r$.

Demostración. Sean γ_1 y γ_2 circulos de radios r' y R' respectivamente, con $r < r' < R' < R$.



Por la fórmula de Cauchy en el anillo $r' \leq |z - z_0| \leq R'$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{f(s)}{s-z} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(s)}{s-z} ds \end{aligned}$$

con $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$.

Procedemos ahora como sigue:

- En γ_2: Observe que para $s \in \gamma_2$ y z en el anillo, siempre se tiene $|s - z_0| > |z - z_0|$. Por lo tanto, usando la serie geométrica, podemos escribir:

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s - z_0 + z_0 - z}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{s-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(s-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.
\end{aligned}
$$

Entonces, integrando término a término y procediendo como en demostración de teorema anterior (serie de Taylor), se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(s)}{s-z}ds = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

- En γ_1: Observe ahora que, para $s \in \gamma_1$ y z en el anillo, se tiene $|s-z_0| < |z-z_0|$. Por lo tanto, podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s-z} &= \frac{1}{s-z_0+z_0-z} \\
&= \frac{1}{z_0-z}\frac{1}{(1+\frac{s-z_0}{z_0-z})} \\
&= \frac{1}{z_0-z}\frac{1}{(1-\frac{s-z_0}{z-z_0})} \\
&= \frac{-1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^n} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}(s-z_0)^n\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Integrando término a término, lo cual es justificado por la convergencia uniforme sobre compactos de la serie, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(s)}{(s-z)}ds &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(s)(s-z_0)^n ds\right)\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(s)(s-z_0)^{n-1}ds\right)\frac{1}{(z-z_0)^{n}}
\end{aligned}
$$

Esto prueba el teorema.

Observacion 63. *De la demostracion del teorema anterior se nota que:*

$$b_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(s)(s-z_0)^{k-1}ds$$

con $k = 1, 2, 3, ...$

Hay tres posibilidades:

1) $b_k = 0$ *para todo* $k = 1, 2, 3, ...$ *En este caso, la función* f *es realmente analitica en* $|z - z_0| < R$*. Se dice en este caso que* f *tiene una singularidad removible en* z_0*.*

2) $b_k = 0$ *para todo* $k > m$ *y* $b_m \neq 0$*. En este caso,* f *tiene la forma:*

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + ... + \frac{b_1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + ...$$

y se dice en este caso que f *tiene un polo de orden* m *en* z_0*.*

Además :

$$\frac{b_m}{(z-z_0)^m} + ... + \frac{b_1}{(z-z_0)}$$

se llama parte principal de f *y*

$$b_1 := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(s)ds = \mathrm{Res}(f, z_0)$$

se llama el residuo de f *en* z_0*.*

3) Hay infinitos $b_k \neq 0$*. En este caso se dice que* f *tiene una singularidad esencial en* z_0*.*

Ejemplo 64. *1) Hallar el desarrollo en serie de Laurent de* $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3}$ *en torno a* $z_0 = 0$*.*

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...$$

Note que:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} + ...$$

Luego $f(z)$ tiene un polo de orden 3 en $z_0 = 0$.

2) Encontrar el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = e^{1/z}$ en torno a $z_0 = 0$.

Se tiene:

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + ...$$

Entonces

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + ...$$

Luego $e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en $z_0 = 0$.

5.2. Teorema de Casorati-Weierstrass

El mejor resultado conocido respecto del comportamiento de las singularidades esenciales, es el siguiente Teorema.

Teorema 65. *(Casorati-Weierstrass) Sea z_0 una singularidad esencial de $f(z)$. Entonces la imagen de cualquier vecindad de z_0 es densa en el plano complejo $\mathbb{C}$. Es decir, $\overline{f(D(z_0, r))} = \mathbb{C}$ para cada $r > 0$.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces existe un $\delta > 0$ $\epsilon > 0$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tales que $|z - z_0| < \delta$ implica $|f(z) - w_0| \geq \epsilon$.
Consideremos

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

Claramente h es analítica en $D(z_0, \delta)$. Sin embargo, observe que h es acotada:

$$|h(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}, \quad z \in D(z_0, \delta).$$

Esto implica que $h(z)$ es también analítica en z_0, pues tiene un desarrollo en serie de Laurent, y si tuviera un número infinito de potencias de $z - z_0$ negativas, entonces no podriÂŋa ser acotada. En otras palabras, si suponemos que:

$$h(z) = ... + \frac{b_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z - z_0)} + b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + ...$$

siendo $|h(z)| < \frac{1}{\epsilon}$ para todo $z \in D(z_0, \delta)$, esto implica necesariamente que $b_{-1} = b_{-2} = ... = 0$.

Concluimos, por lo tanto, que:

$$h(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + ...$$

En particular, esto nos dice que $h(z)$ es analítica en z_0 y, de su definición, podemos escribir:

$$f(z) - w_0 = \frac{1}{b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + ...}$$

Es claro que debe existir un $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $b_n \neq 0$ (de otra forma h seria la función cero, lo que no puede ser por su propia definición). Por lo tanto, tendriamos:

$$\begin{aligned}
f(z) - w_0 &= \frac{1}{b_n(z-z_0)^n + b_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + ...} \\
&= \frac{1}{b_n(z-z_0)^n} \frac{1}{(1 + \frac{b_{n+1}}{b_n}(z-z_0) + ...)} \\
&= \frac{1}{b_n(z-z_0)^n}(c_0 + c_1(z-z_0) + ...)
\end{aligned}$$

Luego $f(z) = w_0 + \dfrac{c_0}{b_n(z-z_0)^n} + \dfrac{c_1}{b_n(z-z_0)^{n-1}} + ...$
Por lo tanto, f tiene un polo de orden n en z_0. Contradicción. ∎

En lo que sigue, estudiaremos principalmente una clase especial de funciones analiticas, que se definen a continuación:

Definición 66. *Una función f se dice meromorfa en Ω si es el cuociente de dos funciones analíticas, esto es: $f = \dfrac{p}{q}$ donde $q \neq 0$.*

Observacion 67. *Las singularidades de una función meromorfa $f = p/q$, corresponden a los ceros de q (pueden ser polos o singularidades esenciales).*

El teorema siguiente es importante para la próxima sección.

Teorema 68. *Los ceros de una función analítica estan aislados (son discretos)*

Demostración. Sea $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = 0$, entonces existe una vecindad de z_0 tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ...$$

Sea n_0 el primer entero tal que $a_{n_0} \neq 0$ en la serie anterior, entonces podemos escribir

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} \underbrace{(a_{n_0} + a_{n_0+1}(z - z_0) + ...)}_{g(z)}$$

Afirmamos que hay una vecindad de z_0 donde $f(z) \neq 0$ excepto por z_0, lo que dice que z_0 esta aislado.

En efecto : Si no fuese asi, existe una sucesión $z_n \to z_0$ tal que $f(z_n) = 0$, esto es una sucesion de ceros z_n de f, distintos de z_0, que converge a z_0. Entonces, reemplazando en la identidad anterior, se debe tener

$$0 = f(z_n) = (z_n - z_0)^{n_0} g(z_n).$$

Ya que $z_n \neq z_0$ se debe necesariamente tener $g(z_n) = 0$ para todo n. Como g es analitica, es continua. Luego, por continuidad, se debe tener $a_{n_0} = g(z_0) = 0$. Esto contradice que $a_{n_0} \neq 0$. Por lo tanto, z_0 esta aislado. ∎

5.3. Residuos

Uno de los resultados más importantes de este curso, es el siguiente teorema.

Teorema 69. *(De residuos) Sea f meromorfa en Ω. Sea K compacto en Ω con borde γ. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i)$$

Antes de demostrar este teorema, probaremos la siguiente observacion, que nos dice que la suma finita del lado derecho tiene sentido.

Observacion 70. *Hay solo un numero finito de singularidades de f en K.*

En efecto, si no fuese cierto, tendriamos una sucesión (infinita, de puntos distintos) de singularidades z_n de $f = p/q$ que corresponden a los ceros de la funcion analitica q, esto es $q(z_n) = 0$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass (aplicado a cada componente de $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), esta sucesion (z_n) de ceros de q posee una subsucesion convergente, esto es, tendra un punto de acumulación z_0 en K y luego en Ω. Como q es analitica, luego continua, se tendra: $q(z_0) = 0$. Pero entonces q es una funcion analitica con un cero que no es aislado, lo que contradice teorema anterior.

Pasemos ahora a demostrar el teorema de residuos.

Demostración. Sean C_i pequeños discos abiertos de radio ϵ_i en torno a cada singularidad z_i, de manera que estos discos queden en el interior de K. Es claro que función $f(z)$ es analitica fuera de la union de esos discos. Sea γ_i el borde de cada uno de ellos. Aplicando el Teorema de Cauchy, se tiene:

$$\int_{\gamma\setminus\bigcup C_i} f(z)dz = 0$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} f(z)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{n}\int_{|z-z_i|=\epsilon_i} f(z)dz \\ &= \sum_{i=1}^{n} Res(f,z_i)\end{aligned}$$

donde en la ultima igualdad hemos aplicado la formula de Cauchy a cada disco, individualmente.

■

El siguiente resultado nos da un primer criterio practico para encontrar residuos.

Proposición 71. *Si* $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ *meromorfa, es tal que* $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ *y* $q'(z_0) \neq 0$. *Entonces*

$$Res(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Demostración.

$$q(z) = q(z_0) + q'(z_0)(z - z_0) + ... = q'(z_0)(z - z_0) + ...$$

Por lo tanto, z_0 es cero de orden 1 de $q(z)$. Es decir, z_0 es un polo de orden 1 de f.

Entonces

$$\begin{aligned}
(z-z_0)f(z) &= \frac{(z-z_0)p(z)}{q'(z_0)(z-z_0)+\dfrac{q''(z_0)(z-z_0)^2}{2!}+\ldots} \\
&= \frac{p(z)}{q'(z_0)+\dfrac{q''(z_0)(z-z_0)}{2!}+\ldots}
\end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Por otra parte, ya que ahora sabemos que z_0 es polo de orden 1, por la expansion en serie de Laurent de f en torno a z_0, se tiene:

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots$$

Así

$$(z-z_0)f(z)=a_{-1}+(z-z_0)a_0+a_1(z-z_0)^2+\ldots$$

Luego

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=a_{-1}=: Res(f,z_0).$$

Por lo tanto

$$Res(f,z_0)=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

■

Ejemplo 72. *Calcular el residuo de* $\tan z$ *en* $z_0=\pi/2$.

Tenemos que $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, *donde* $p(z) = \sin z$ *y* $q(z) = \cos z$. *Note que*

$$p(z_0) = \sin(\pi/2) = 1 \neq 0$$

$$q(z_0) = \cos(\pi/2) = 0$$

y

$$q'(z_0) = -\sin(\pi/2) = -1$$

Así obtenemos que

$$Res(\tan z, \pi/2) = \frac{1}{-1} = -1.$$

5.4. Principio del Argumento y Teorema de Rouché

A continuacion veremos algunas consecuencias importantes del teorema de residuos.

Teorema 73. *(Principio del Argumento) Sea f meromorfa en el interior de una curva γ. Sean $a_1, a_2, ...a_n$ los ceros de f y $b_1, b_2, ...b_m$ los polos de f.*

Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{n} F(a_i) - \sum_{i=1}^{m} F(b_i),$$

para cada función holomorfa $F(z)$.

En particular, si $F(z) = 1$ se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n - m.$$

Demostración. Sea α uno de los puntos a_i o b_j. Por lo que hemos visto anteriormente, en cualquier caso, tenemos:

$$f(z) = a_v(z-\alpha)^v(1 + b_1(z-\alpha) + ...)$$

donde v es el orden del cero o polo en a_i o b_j con $v \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$f'(z) = va_v(z-\alpha)^{v-1} + ...$$

Luego

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{v}{(z-\alpha)} + ...$$

Por otro lado, como f es analitica, se tiene

$$F(z) = F(\alpha) + F'(\alpha)(z-\alpha) + ...$$

Así

$$F(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{vF(\alpha)}{(z-\alpha)} + vF'(\alpha) + ...$$

Lo anterior nos dice que:

$$Res\left(F\frac{f'(z)}{f(z)}, \alpha\right) = vF(\alpha)$$

Finalmente, por el Teorema de Residuos, obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{n} F(a_i) - \sum_{i=1}^{m} F(b_i)$$

■

Continuamos con el siguiente importante resultado:

Teorema 74. *(de Rouché) Sea $\partial\Omega$ el borde de un dominio Ω y sean f y g analíticas en Ω tales que $|f(z)| < |g(z)|$ para cada $z \in \partial\Omega$. Entonces $f(z) + g(z)$ y $g(z)$ tienen el mismo número de ceros en Ω.*

Demostración. Por el Principio del Argumento, basta probar que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \int_{\partial\Omega} \frac{(f(z)+g(z))'}{(f(z)+g(z))} dz.$$

Esto es:

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{(f(z)+g(z))'}{(f(z)+g(z))} dz \right) = 0$$

o bien

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)g'(z) - g(z)f'(z)}{(f(z)+g(z))g(z)} dz = 0.$$

En efecto: Tenemos en $\partial\Omega$ por hipotesis:

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| < 1.$$

Lo anterior implica que la imagen de $\partial\Omega$ bajo $1 + \dfrac{f}{g}$ está en el disco $D(1,1)$, pues $\left| \left(1 + \dfrac{f(z)}{g(z)} \right) - 1 \right| < 1$. Entonces $1 + \dfrac{f}{g} \neq 0$ en Ω y por el teorema de Cauchy, se tiene:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{(\frac{f}{g})'(z)}{1 + \frac{f}{g}(z)} dz = 0.$$

Lo anterior es equivalente a:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(1 + \frac{f(z)}{g(z)})g^2(z)} dz = 0$$

esto es

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z)+f(z))g(z)} dz = 0.$$

Esto prueba la afirmacion y el Teorema. ∎

5.5. Aplicaciones al cálculo de integrales

Comenzamos esta sección estableciendo un criterio práctico para el cálculo de residuos en el caso que estos sean polos de orden n.

En primer lugar, hemos visto que si f tiene un polo simple (orden 1) en z_0 entonces

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ...$$

Note que:

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + a_2(z - z_0)^3 + ...$$

Luego:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = a_{-1} = Res(f, z_0).$$

Por otra parte, si f tiene un polo de orden 2 en z_0, se tiene:

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ...$$

Luego:

$$(z - z_0)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z - z_0) + a_0(z - z_0)^2 + a_1(z - z_0)^3 + ...$$

Note que:

$$\frac{d}{dt}[(z - z_0)^2 f(z)] = a_{-1} + 2a_0(z - z_0) + 3a_1(z - z_0)^2 + ...$$

Luego:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d}{dt}[(z - z_0)^2 f(z)] = a_{-1} = Res(f, z_0).$$

Continuemos con un polo de orden 3 en z_0. Se tiene:

$$f(z) = \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + ...$$

Luego:

$$(z-z_0)^3 f(z) = a_{-3} + a_{-2}(z-z_0) + a_{-1}(z-z_0)^2 + a_0(z-z_0)^3 + ...$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}[(z-z_0)^3 f(z)] = a_{-2} + 2a_{-1}(z-z_0) + 3a_0(z-z_0)^2 + 4a_1(z-z_0)^3 + ...$$

Derivando una vez mas obtenemos:

$$\frac{d^2}{dt^2}[(z-z_0)^3 f(z)] = 2a_{-1} + 3 \cdot 2a_0(z-z_0) + 4 \cdot 3a_1(z-z_0)^2 + ...$$

Obteniendo finalmente:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^2}{dt^2}[(z-z_0)^3 f(z)] = 2a_{-1} = 2!Res(f, z_0).$$

En general, se tiene la formula:

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)]$$

Continuamos ahora con algunas aplicaciones del teorema de residuos al calculo de integrales de funciones de variable real.

Sea $A_p(z)$ y $B_q(z)$ dos polinomios de grado p y q respectivamente. Sean (a_k) los ceros de $B_q(z)$ y sea: $f(z) = \dfrac{A_p(z)}{B_q(z)}$. Entonces f es una funcion meromorfa.

A continuación analizaremos varios criterios generales.

(I) Suponga que $B_q(z)$ no tiene ceros reales y $q \geq p + 2$. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{Im(a_i)>0} Res(f, a_i).$$

En efecto: Sea γ_R el arco de circunferencia $\gamma_R(t) = Re^{it};\ \ 0 \leq t \leq \pi$. Si R es suficientemente grande, se tiene por el teorema de residuos que:

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{Im(a_i)>0} Res(f, a_i)$$

y luego el resultado se sigue del Teorema de Residuos si probamos que: $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0$, cuando $R \to \infty$. Para esto, ocuparemos el siguiente Lema que es mucho mas general:

Lema 75. *Sea $g(z)$ continua en el sector $\{z = \rho e^{i\theta};\ \rho \geq R_0;\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$. Si ocurre que $\lim\limits_{z\to\infty} (zg(z)) = 0$, entonces:*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)dz = 0.$$

En efecto, note que si el Lema es verdadero, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
zf(z) &= z\frac{A_p(z)}{B_q(z)} \\
&= \frac{\text{polinomio de grado } p+1}{\text{polinomio de grado } q} \\
&= \text{polinomio de grado } p+1-q \leq -1 \\
&\sim \frac{1}{z} \to 0 \text{ cuando } z \to \infty
\end{aligned}$$

lo que prueba el criterio **(I)**.

A continuación probaremos el Lema.

Demostración. Sea el camino $\gamma_\rho(t) = \rho e^{it}$ con $t \in [\theta_1, \theta_2]$. Entonces:

$$\left|\int_{\gamma_\rho} g\,(z)dz\right| = \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} g\left(\rho e^{it}\right)\rho i e^{it}dt\right|$$

$$\leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left|\rho g\left(\rho e^{it}\right)\right| dt \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0$$

■

Ejemplo 76. *Demostrar que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Solución: Sea $z^2 = A_2(z)$ *y* $1+z^4 = B_4(z)$, *entonces*

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{A_2(z)}{B_4(z)}.$$

Note que las raices de $B_4(z) = 1+z^4$ *corresponden a aquellos* $z \in \mathbb{C}$ *tales que* $z^4 = -1$, *y explicitamente son:*

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$; $z_3 = e^{\frac{5i\pi}{4}}$; $z_4 = e^{\frac{7i\pi}{4}}$.

Además, $f(z) = \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$. *Luego, las singularidades (polo de orden* 1*) que están dentro de la semicircunferencia superior son:* z_1 *y* z_2. *Calculemos los residuos en cada uno de esos puntos.*

$$Res(f, z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4}\frac{1}{z_1} = \frac{1}{4}e^{\frac{-\pi i}{4}}$$

Por otro lado, el residuo de f *respecto a la segunda singularidad es:*

$$Res(f, z_2) = \frac{1}{4}e^{\frac{-3i\pi}{4}}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{2\pi i}{4}[e^{\frac{-\pi i}{4}} + e^{\frac{-3\pi i}{4}}] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

5.6. Otros criterios para el cálculo de integrales

El segundo criterio general que estudiaremos es el siguiente:

(II) Suponga que $B_q(z)$ no tiene ceros reales y que $q \geq p+1$ y $\lambda > 0$. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x} = 2\pi i \sum_{Im(a_k)>0} Res(f(z)e^{i\lambda z}, a_k).$$

En efecto, por el Teorema de Residuos, se tiene:

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\lambda x}dx + \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z}dz = 2\pi i \sum_{Im(a_k)>0} Res(f(z)e^{i\lambda z}, a_k)$$

donde la justificación que la integral sobre γ_R va a cero cuando $R \to \infty$ se da por medio del siguiente Lema de carácter mas general.

Lema 77. *Sea g una función continua en un sector del semi-plano superior $\{z = \rho e^{i\theta}/\rho \geq R; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$, donde $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi$. Si $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 0$ y $\lambda > 0$, entonces:*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)e^{i\lambda z}dz = 0$$

Demostración. Sea $\gamma_R(t) = Re^{it}$, con $t \in [\theta_1, \theta_2]$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} g(z)e^{i\lambda z}dz\right| &= \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} g(Re^{it})e^{i\lambda Re^{it}}Rie^{it}dt\right| \\
&\leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left|g(Re^{it})\right| \left|e^{i\lambda R(\cos t+i\sin t)}Rie^{it}\right| dt \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left|g(Re^{it})\right| \left|e^{i\lambda R\cos t}\right| \left|e^{-\lambda R\sin t}\right| R \left|ie^{it}\right| dt \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mid g(Re^{it}) \mid Re^{-\lambda R\sin t}dt
\end{aligned}$$

y $Re^{-\lambda R\sin t} \to 0$, cuando $R \to \infty$, ya que $\lambda R\sin t > 0$ pues $t \in [\theta_1, \theta_2] \subset [0, \pi]$. Luego:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mid g(Re^{it}) \mid Re^{-\lambda R\sin t}dt \to 0,$$

cuando $R \to \infty$. Esto prueba el Lema. ∎

Ejercicio 78. *Calcular* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{cosx}{(x^2+1)^2}dx$. *Ayuda: Usar* $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$.

(III) Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$, donde $R(x, y)$ es una función racional de dos variables reales.

Solución: Se puede escribir como

$$\int_{|z|=1} R\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}, \frac{z+\overline{z}}{2}\right)\frac{1}{iz}dz$$

y esta última se resuelve con ayuda del Teorema de Residuos.

Ejemplo 79. *Calcular el valor de* $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos x}dx$, *donde* $a > 1$.

Solución: Ocupando que $\cos(x) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, *se tiene:*

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos x} dx &= \int_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{z+\overline{z}}{2}} \frac{1}{iz} dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(a+\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}\right)} \frac{dz}{iz} \\
&= \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{2az+z^2+1} dz
\end{aligned}$$

Notar que:

$$z^2+2az+1=0 \;\Leftrightarrow\; z=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4}}{2}=-a\pm\sqrt{a^2-1},$$

donde solo $z_1=-a+\sqrt{a^2-1}$ *queda dentro de la circunferencia* $|z|<1$*, pues* $z_2=-a-\sqrt{a^2-1}$ *esta fuera ya que* $a>1$*.*

Luego, por el Teorema de Residuos, se obtiene:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2}{i}\, 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{2az+z^2+1}, z_1\right) \\
&= 4\pi \lim_{z\to z_1} \frac{1}{z-z_2} = \frac{4\pi}{z_1-z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.
\end{aligned}$$

(IV) Supongamos que $f(z)=\frac{A_p(a)}{B_q(z)}$ tiene un polo simple a_0 sobre el eje real. Sean $q\geq p+1$ y $\lambda>0$. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i \sum_{Im(a_k)>0} Res(f(z)e^{i\lambda z}, a_k) + i\pi Res(f(z)e^{i\lambda z}, a_0).$$

Demostración.

Dados, $R>0$ y $0<\varepsilon<R$, denotamos por $\gamma_{R,\varepsilon}$ la frontera de la región limitada por el eje real y las semicircunferencias γ_R y $a_0+\gamma_\varepsilon$ orientadas positivamente.

Para R suficientemente grande y ε suficientemente pequeño, el Teorema de Residuos nos dice que:

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)e^{i\lambda z}dz = 2\pi i \sum_{Im(a_k)>0} Res(f(z)e^{i\lambda z}, a_k)$$

Observamos ahora lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)e^{i\lambda z}dz &= \int_{-R}^{a_0-\varepsilon} f(x)e^{i\lambda x}dx + \int_{\gamma_{\varepsilon,0}} f(z)e^{i\lambda z}dz \\ &+ \int_{a_0+\varepsilon}^{R} f(x)e^{i\lambda x}dx + \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z}dz\end{aligned}$$

Por el lema visto anteriormente, la ultima integral es 0 (ya que $\lambda > 0$ y $q \geq p+1$).

Afirmamos que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,0}} g(z)dz = -i\pi \operatorname{Res}\left(g(z), a_0\right),$$

donde $g\left(z\right) = f\left(z\right)e^{i\lambda z}$.

En efecto, como $z = a_0$ es polo real simple de $g(z)$ se tiene:

$$g(z) = \frac{b_1}{(z-a_0)} + c_0 + c_1(z-a_0) + c_2(z-a_0)^2 + ...$$

donde $b_1 = \operatorname{Res}\left(g(z), a_0\right)$. Si consideramos:

$$h(z) \equiv g(z) - \frac{b_1}{(z-a_0)} = b_0 + b_1(z-a_0) + b_2(z-a_0)^2 + ...$$

tenemos que $h(z)$ es analítica en $z = a_0$, o sea, $z = a_0$ es singularidad reparable de $h(z)$. Por lo tanto, existe $M > 0$ tal que:

$$\mid h(z) \mid < M, \qquad \mid z - a_0 \mid \leq 1.$$

Luego, definiendo $\gamma_{\varepsilon,0}(t) = a_0 + \varepsilon e^{-it}, \quad t \in [0,\pi]$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_{\varepsilon,0}} h(z)\,dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} h(\gamma_{\varepsilon,0}(t))\,\gamma'_{\varepsilon,0}(t)dt\right| \\
&\leq M\int_0^{\pi} \left|\gamma'_{\varepsilon,0}(t)\right|dt \\
&= M\int_0^{\pi} \varepsilon dt = M\varepsilon\pi
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,0}} h(z)dz = 0$.

Como queremos probar que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,0}} g(z)dz = -i\pi Res(g(z), a_0)$, obtenemos de $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,0}} h(z)dz = 0$ que:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,0}} g(z)dz &= b_1\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,0}} \frac{1}{z-a_0}dz \\
&= \mathrm{Res}\,(g(z), a_0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,0}} \frac{1}{z-a_0}dz
\end{aligned}$$

Donde:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,0}} \frac{1}{z-a_0}dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\pi} \frac{-1}{\varepsilon e^{-it}}\varepsilon i e^{-it}dt = -i\pi,$$

esto prueba la afirmación y el resultado. ■

Ejercicio 80. *Demostrar que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sinx}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

(V) Consideremos

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}f(x)dx; \quad 0 < a < 1.$$

Suponemos que $f(z)$ no tiene polos en $(0,\infty)$ y que se cumple:

a) $\lim\limits_{z\to\infty} \mid z^a f(z) \mid = 0$.

b) $\lim\limits_{z\to 0} \mid z^a f(z) \mid = 0.$

Entonces:

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} f(x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}} \sum_{a_k \neq 0} Res(z^{a-1}f(z), a_k).$$

Siendo $z^{a-1} = e^{(a-1)\log_\pi(z)}$, donde $\log_\pi(z)$ es la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C}\setminus(0,\infty)$ con $0<\theta<2\pi$.

Demostración. En una figura tipo cerradura, se considera su borde que se denota $\gamma_{R,r,\varepsilon}$.

Por el Teorema de Residuos, tenemos que :

$$\int_{\gamma_{R,r,\varepsilon}} f(z)z^{a-1}dz = 2\pi i \sum_{a_k \neq 0} Res(f(z)z^{a-1}, a_k).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{R,r,\varepsilon}} f(z)z^{a-1}dz &= \int_r^R f(x)x^{a-1}dx + \int_{\gamma_R} f(z)z^{a-1}dz \\
&+ \int_R^r f(x)(xe^{2\pi i})^{a-1}dx + \int_{\gamma_r} f(z)z^{a-1}dz \\
&= \int_r^R f(x)x^{a-1}dx - \int_r^R f(x)x^{a-1}e^{2\pi i(a-1)}dx \\
&+ \int_{\gamma_R} f(z)z^{a-1}dz + \int_{\gamma_r} f(z)z^{a-1}dz \\
&= (1-e^{2\pi i a})\int_r^R f(x)x^{a-1}dx \\
&+ \int_{\gamma_R} f(z)z^{a-1}dz + \int_{\gamma_r} f(z)z^{a-1}dz
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_R} z^{a-1} f(z)dz\right| &= \left|\int_0^{2\pi} R^{a-1}e^{i(a-1)t}f(Re^{it})Rie^{it}dt\right| \\ &= \left|\int_0^{2\pi} R^a f(Re^{it})e^{iat}idt\right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left|R^a f\left(Re^{it}\right)\right|dt \xrightarrow[R\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Esto ocurre, ocupando la primera propiedad: $\lim\limits_{z\to\infty} \mid z^a f(z) \mid = 0$.

Análogamente, si ocupamos la segunda propiedad:

$$\int_{\gamma_r} z^{a-1} f(z)\, dz \xrightarrow[r\to 0]{} 0,$$

Ya que el $\lim\limits_{z\to 0} \mid z^a f(z) \mid = 0$. ■

5.7. Fórmula de Poisson

Recordemos que $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Sabemos que si f es analítica en $\mathbb{D}$, entonces por fórmula de integral de Cauchy tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)}dw$$

siempre que $|z| < 1$ donde $\gamma(t) = e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sea $z_1 = \dfrac{1}{\overline{z}}$, con $z \in \mathbb{D}$. Entonces

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_1)}dw$$

De lo anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-z)}dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-z_1)}dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(\frac{1}{(w-z)}-\frac{1}{(w-\frac{1}{\overline{z}})})f(w)dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(|z|^2-1)}{(w-z)(w\overline{z}-1)}f(w)dw
\end{aligned}$$

Donde la ultima igualdad se justifica por lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w-z}-\frac{1}{w-\frac{1}{\overline{z}}} &= \frac{(w-\frac{1}{\overline{z}})-(w-z)}{(w-z)(w-\frac{1}{\overline{z}})} \\
&= \frac{z-\frac{1}{\overline{z}}}{(w-z)(w-\frac{1}{\overline{z}})} \\
&= \frac{|z|^2-1}{(w-z)(w\overline{z}-1)}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{|z|^2-1}{(e^{it}-z)(e^{it}\overline{z}-1)}f(e^{it})ie^{it}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|z|^2-1}{(1-e^{-it}z)(e^{it}\overline{z}-1)}f(e^{it})dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{(e^{-it}z-1)(e^{it}\overline{z}-1)}f(e^{it})dt
\end{aligned}$$

Si ponemos $z=re^{i\theta}$ con $r<1$ y $\theta\in[0,2\pi]$, entonces

$$\begin{aligned}
f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{|e^{-it}re^{i\theta}-1|^2}f(e^{it})dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{|re^{i(\theta-t)}-1|^2}f(e^{it}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)f(e^{it})dt
\end{aligned}$$

donde $P_r(x) = \dfrac{1-r^2}{|1-re^{ix}|^2}$ y es llamado núcleo de Poisson.

Observemos que calculando obtenemos

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{|1-re^{ix}|^2} = \frac{1-r^2}{(1-re^{ix})(1-re^{-ix})} = \frac{1-r^2}{1-r(e^{-ix}+e^{-ix})+r^2}$$

Notemos que $P_r(x) \in \mathbb{R}$ para todo x, luego si $u = Ref$, entonces

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0 2\pi P_r(\theta - t)u(e^{it})dt$$

AdemÃČÂČÃĆÂąs, notemos que $P_r(x) = P_r(-x)$ y periódica en x de período 2π. También $P_r(x) \geq 0$ para $r < 1$.

Lo anterior podemos generalizarlo a un disco $\mathbb{D}(z_0, R)$.

Teorema 81. *(Fórmula integral de Poisson) Sea f analítica en $\mathbb{D}(z_0, R)$ y continua en $\overline{\mathbb{D}}(z_0, R)$. Entonces si $z = z_0 + re^{i\theta}$ con $0 \leq r \leq R$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)f(z_0 + Re^{it})dt.$$

Si $u = Ref$, entonces

$$u(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)u(z_0 + Re^{it})dt.$$

La fórmula anterior, expresa que el valor de una función analítica en un punto interior de un disco, es igual al promedio ponderado (por un peso) de un valor en el borde. Dicho peso en cuestion es el núcleo de Poisson.

Tomando $f(z) = 1$ para todo z obtenemos lo siguiente

Corolario 82.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t - \theta)dt = 1.$$

Una aplicación de la fórmula de Poisson es que podemos resolver el problema siguente:

Problema de Dirichlet:

Resolver

$$\Delta u(x,y) = 0$$

en $x^2 + y^2 < 1$, con condiciones de borde dadas por

$$u(x,y) = g(x,y)$$

para $x^2 + y^2 = 1$, donde g es continua.

La respuesta a este problema es (en coordenadas polares)

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)g(e^{it})dt$$

con $0 \leq r < 1$.

Demostración. Primero veremos que u es la parte real de una función analítica. Luego, $\Delta u = 0$ según sabemos.

En efecto, sea

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} g(e^{it})dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{w+z}{w-z} g(w)dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{w}{w-z} - \frac{1}{w}\right) g(w)dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{2g(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(w)}{w}dw \end{aligned}$$

donde $\gamma(t) = e^{it}$.

Luego $f(z)$ es analítica en $|z|<1$, además

$$Ref(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)g(e^{it})dt$$

donde si $z=re^{i\theta}$, entonces tendríamos

$$Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)=\frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-it}|^2}=\frac{1-r^2}{|1-re^{i(\theta-t)}|^2}=P_r(\theta-t).$$

Esto prueba que $Ref(z)=u(z)$ con $z=re^{i\theta}$, luego $\Delta u=0$.

Veamos ahora que $u(e^{i\theta})=g(e^{i\theta})$ (se satisface la condición de borde).

Sea $0<r<1$, entonces veremos que

$$\lim_{r\to -1} u(re^{i\theta})=g(e^{i\theta})$$

con $\theta\in[0,2\pi]$.

En efecto

$$\begin{aligned}
\left|u\left(re^{i\theta}\right)-g\left(e^{i\theta}\right)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r\left(\theta-t\right)g\left(e^{it}\right)dt-g\left(e^{i\theta}\right)\right|\\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r\left(\theta-t\right)\left(g\left(e^{it}\right)-g\left(e^{i\theta}\right)\right)dt\right|\\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{2\pi-\theta} P_r(x)\left(g\left(e^{i(\theta+x)}\right)-g\left(e^{i\theta}\right)\right)dx\right|\\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\left(g\left(e^{i(\theta+x)}\right)-g\left(e^{i\theta}\right)\right)dx\right|\\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\left|g\left(e^{i(\theta+x)}\right)-g\left(e^{i\theta}\right)\right|dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} P_r(x)\left|g\left(e^{i(\theta+x)}\right)-g\left(e^{i\theta}\right)\right|dx\\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{|x|\ge\delta} P_r(x)\left|g\left(e^{i(\theta+x)}\right)-g\left(e^{i\theta}\right)\right|dx
\end{aligned}$$

$$= \quad I_1 + I_2$$

donde, dado $\epsilon < 0$ se elige $\delta > 0$ tal que $\left|g\left(e^{i(\theta+x)}\right) - g\left(e^{i\theta}\right)\right| < \epsilon$ para cada θ. Si $|x| < \delta$ (por continuidad de la función g dada la hipótesis), luego

$$I_1 \leq \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} P_r(x)dx \leq \epsilon$$

Además notemos que

$$I_2 \leq \frac{P_r(\delta)}{2\pi}\int_{|x|\geq\delta} |g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})|dx$$

En efecto, notemos que $P_r(x) \leq P_r(\delta)$ si $|x| \geq \delta$ y $-\pi \leq x \leq \pi$.

Así

$$I_2 \leq \frac{P_r(\delta)}{2\pi}\int_{-pi}^{\pi} |g(e^{i(\theta+x)}) - g(e^{i\theta})|dx$$

Sea $M = max_{-\pi\leq x\leq\pi}|g(e^{i(\theta+x)})|$, entonces

$$I_2 \leq 2MP_r(\delta)$$

Si hacemos $r \to 1-$

$$\lim_{r\to 1-} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\delta)+r^2} = \frac{0}{2-2\cos(\delta)} = 0$$

Esto prueba la afirmación. ■

5.8. Fórmula de Jensen

Sea f analítica en Ω tal que $\overline{\mathbb{D}}(0,1) \subseteq \Omega$.

Suponga que f tiene un logaritmo en Ω, esto es $\log f(z)$ es analítica en Ω, entonces aplicando la fórmula integral de Poisson a $Re(\log f(z)) = \log(|f(z)|)$, obtenemos

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \ln |f(e^{it})| dt$$

con $z = e^{i\theta}$y $0 \leq r < 1$.

Ahora, si f tiene ceros en $\mathbb{D}$, $log f(z)$ puede no ser analítica. Sin embargo, se puede modificar la fórmula anterior para tomar en cuenta los ceros de f. Esta es la llamada fórmula de Jensen-Poisson.

Teorema 83. *(Fórmula de Jensen-Poisson) Sea f analítica en $\overline{\mathbb{D}}$ y suponga que $f(z) \neq 0$ en $\partial\mathbb{D}$.*

Sean $a_1, a_2, ...a_n$ los ceros de f en $\mathbb{D}$.

Entonces

$$\log |f(z)| = \sum_{j=1}^{n} \log \left| \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) log |f(e^{it})| dt$$

Demostración. Sea $g(z) = f(z) \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - \overline{a_j} z}{z - a_j}$ para $|z| < R$ y $R < 1$.

Recordemos que para cada a_i con $|a_i| < 1$

$$\phi_{a_i}(z) = \frac{z - a_i}{1 - \overline{a_i} z}$$

es una Transformación de Mobius que lleva $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ Y $\partial\mathbb{D}$ en $\partial\mathbb{D}$. Entonces

$$\phi_{a_i}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = \frac{1 - a_i \overline{z}}{\overline{z} - \overline{a_i}}$$

y

$$\overline{\phi_{a_i}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = 1$$

Haciendo el desarrollo en serie de Taylor

$$f(z) = a_k(z - a_i)^k + ...$$

con $c_k \neq 0$.

Entonces

$$\frac{f(z)}{(z - a_i)^k} = c_k + c_{k+1}(z - a_i) + ...$$

es analítica en $z = a_i$.

Por lo tanto $g(z)$ es analítica en $\mathbb{D}(0, R)$ y no tiene ceros allí.

Además $|g(e^{it})| = |f(e^{it})|$, y

$$\ln|g(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\ln|g(e^{it})|dt$$

Luego de lo anterior tenemos que

$$\ln|f(z)| + \ln\left(\left|\prod_{j=1}^{n}(\frac{1 - \overline{a_j}z}{z - a_j})\right|\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\ln|g(e^{it})|dt$$

luego tenemos

$$\begin{aligned} \ln|f(z)| &= \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j}z}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\ln|g(e^{it})|dt \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{|z - a_j|}{|1 - \overline{a_j}z|} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\ln|f(e^{it})|dt \end{aligned}$$

El caso particular en que $z = 0$, se conoce como fórmula de Jensen. ■

Teorema 84. *(Fórmula de Jensen) Sea f analítica en $\overline{\mathbb{D}}$ y suponga que $f(0) \neq 0$ y $f(z) \neq 0$ en $\partial\mathbb{D}$.*

Sean $a_1, a_2, ...a_n$ los ceros de f en $\mathbb{D}$, repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Entonces

$$\ln|f(0)| = \sum_{j=1}^{n} \ln|a_j| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(e^{it})|dt$$

En efecto, en este caso, $r = 0$, luego

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{ix}|^2}$$

entonces $P_0(x) = 1$, de donde sale el resultado usando el teorema anterior.

Observacion 85. *Las fórmulas anteriores son importantes en la teoría de funciones enteras (f analítica en $\mathbb{C}$).*

5.9. Automorfismos del disco unitario

Denotemos $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Lema 86. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analítica tal que $f(0) = 0$.*

Entonces

i) $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $|f'(0)| \leq 1$.

ii)$|f'(0)| = 1$, entonces $f(z) = az$, donde $|a| = 1$.

Demostración.

i) Por la hipótesis

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + f'(0)z + f''(0)z^2 + ... \\ &= f'(0)z + f''(0)z^2 \end{aligned}$$

para $z \in \mathbb{D}$.

Entonces $g(z) = \dfrac{f(z)}{z} = f'(0) + f''(0)z + ...$ es analítica en $\mathbb{D}$.

Sea $z \in \mathbb{D}$ tal que $|z| = r < 1$, entonces en $\{z : |z| < r\}$ se tiene de acuerdo al principio del máximo para g

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq Sup_{|w|=r}\left|\frac{f(w)}{w}\right| \leq Sup_{|w|=r}\frac{1}{|w|} = \frac{1}{r}$$

Haciendo ahora $r \to 1-$ se obtiene $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Por otra parte, si $g(z) = \frac{f(z)}{z} = f'(0) + f''(0)z + ...$, es claro que

$$|f'(0)| = \lim_{z\to 0}|\frac{f(z)}{z}| \leq 1.$$

ii) Supongamos ahora que $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \neq 0$ y $z_0 \in \mathbb{D}$, entonces $|g(z_0)| = 1$ con $|z_0| < 1$.

Pero $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Luego el máximo se alcanza en z_0 que está en el interior de $\mathbb{D}$. Por el principio del máximo, debe ser $g(z)$ constante, digamos $g(z) = a$ con $a \in \mathbb{C}$, entonces $f(z) = az$ con $a \in \mathbb{C}$. Pero $|z_0| = |f(z_0)| = |a||z_0|$. Así $|a| = 1$.

Por otra parte, supongamos que $|f'(0)| = 1$. Entonces como $g(z) = \frac{f(z)}{z} = f'(0) + f''(0)z + ...$, tenemos que

$$|g(0)| = |f'(0)| = 1$$

Así, ya que $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ concluímos otra vez que el máximo se alcanza en 0 que está en el interior de $\mathbb{D}$. Igual que antes llegamos a la conclusión. ∎

El resultado anterior dice que si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es analítica tal que $f(0) = 0$, entonces $f(z) = az$ con $|a| < 1$.

Por ejemplo $f(z) = \dfrac{z}{2}$.

Se puede generalizar el resultado anterior para $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$.

Un ejemplo de tal función es el siguiente $f(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ con $|a| < 1$.

En efecto, es claro que $f(a) = 0$. Veamos que $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Para esto basta ver que

$$f(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Veamos, sea z tal que $|z| = 1$, entonces $z\overline{z} = 1$ ÃČÂČÃĆÂş $z = \dfrac{1}{\overline{z}}$ de donde

$$|z-a| = \left|\frac{1}{\overline{z}} - a\right| = \left|\frac{1}{\overline{z}}(1-\overline{z}a)\right| = |z(1-\overline{z}a)| = |z||1-a\overline{z}|$$

entonces

$$|f(z)| = \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = \frac{|z-a|}{|1-a\overline{z}|} = |z| = 1$$

Esto prueba la afirmación.

Note además que f es invertible (1-1) ya que, de hecho

$$f^{-1}(w) = \frac{w+a}{1+\overline{a}w}$$

y es evidente que es prácticamente igual a f, excepto que a es cambiado por $-a$ de modo que $f^{-1}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Así $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{D}$ y luego $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, esto es f es además sobreyectiva.

Observacion 87. *Si denotamos* $\phi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$, *vemos que* $\phi_a^{-1} = \phi_{-a}$.

El resultado siguente dice que toda función bianalítica de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$, tiene la forma anterior.

Teorema 88. *Sea* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *analítica y biyectiva tal que* $f(a) = 0$, *entonces existe* $c \in \mathbb{C}$ *tal que* $|c| = 1$ *y*

$$f(z) = c\frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

Demostración.

Note que $g = f \circ \phi_{-a}$, $g(0) = 0$ y $g(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Por lema de Schwarz $|g'(0)| \leq 1$.

Ahora

$$g'(z) = f'(\phi_{-a}(z))\phi'_{-a}(z)$$

entonces

$$g'(0) = f'(\phi_{-a}(0))\phi_{-a}(0) = f'(a)(1-|a|^2)$$

ya que

$$\phi'_{-a}(z) = \frac{(1+\overline{a}z) - \overline{a}(z-a)}{(1+\overline{az})^2} = \frac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}z)^2}$$

Por lo tanto

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{1-|a|^2}$$

Análogamente, $h = \phi_a \circ f^{-1}$, con $h(0) = 0$ y $h(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$.

Luego $|h'(0)| \leq 1$.

Calculamos

$$h'(z) = \phi_a'(f^{-1}(z))(f^{-1})'(z)$$

entonces

$$h'(0) = \phi_a'(f^{-1}(0))(f^{-1})'(0) = \phi_a'(a)(f^{-1})'(0).$$

Notemos que

$$\phi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2} \Rightarrow \phi_a'(a) = \frac{1-|a|^2}{(1-|a|^2)^2} = \frac{1}{1-|a|^2}$$

entonces $\left|\dfrac{1}{(1-|a|^2)}(f^{-1})'(0)\right| \leq 1 \;\Rightarrow\; |(f^{-1})'(0)| \leq 1-|a|^2$.

Ahora $f^{-1}(f(z)) = z$, entonces

$$(f^{-1})'(f(z))f'(z) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(f(a))f'(a) = 1$$

así

$$\frac{1}{1-|a|^2} \geq |f'(a)| = |\frac{1}{(f^{-1})'(0)}| \geq \frac{1}{1-|a|^2}$$

entonces

$$|f'(a)| = \frac{1}{1-|a|^2}$$

Con lo anterior podemos ver que

$$|g'(0)| = \left|f'(a)(1-|a|^2)\right| = \frac{1-|a|^2}{1-|a|^2} = 1$$

Por lema de Schwarz $g(z) = cz$ con $|c| = 1$, entonces

$$f \circ \phi_{-a}(z) = cz$$

con $|c| = 1$ y así

$$f(z) = c\phi_a(z)$$

$\blacksquare$

Bibliografía

[1] L. V. Ahlfors. Complex Analysis. McGraw Hil, 1966.

[2] R. B. Ash. Complex variables. Academic Press, New York, 1971.

[3] H. Cartan. Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables. Addison-Wesley, 1963.

[4] J. B. Conway. Functions of one Complex Variable. Graduate texts in Mathematics 11, Springer, New York, 1986.

[5] S. Lang. Complex Analysis. Addison Wesley, Massachusetts, 1977.

[6] R. Spiegel. Theory and Problems of Complex Variables. Shaum, New York, 1964.